Lasciti sotto-scientifici alla matematica d'abbaco: quasi-algebra ed altre strane specie[*]

Jens Høyrup
Università di Roskilde, Danimarca

Non è necessario spiegare in un contesto italiano l'importanza della matematica pratica per la storia della matematica; anzi, il lavoro dei colleghi italiani è una delle fonti più importanti del mio interesse per chiarire l'intreccio fra sviluppo teorico e attività pratica nell'epoca pre-moderna. Senza dubbio anche la mia esperienza di giovane docente di fisica per studenti di ingegneria civile fa parte della mia ispirazione (un'osservazione che forse appartiene alla psicoanalisi dello studioso; ma almeno al suo aspetto pubblicamente confessabile). Credo che non dimenticherò mai lo sforzo che occorreva per dare al mio sapere di teorico una forma che potesse entrare in dialogo con il sapere, i bisogni professionali e la motivazione di studenti che volevano calcolare soltanto quando bisognava (e serviva) veramente calcolare; ho imparato ancora di più dalla resistenza di certi colleghi a cui i miei tentativi di dialogo fra tipi di sapere appariva un'estremismo pericolosissimo e scandaloso (estremismo di sinistra, è ovvio – si era nei primi anni settanta).

Sarebbero trascorsi 15 anni da allora fino al momento in cui il rapporto tra i vari tipi di sapere mi apparisse abbastanza chiaro. Nel 1984 parlavo ancora del sapere dei pratici come «sapere popolare» («folk knowledge»);[1] solo quando ho cercato di capire la relazione fra la scienza del mondo medioevale islamico e le sue fonti è cominciata a precipitare la nozione di «sapere sotto-scientifico». Nel seguito intendo inizialmente presentare questa nozione,[2] avvicinandomi ad essa in modo indiretto, cioè attraverso la matematica detta «di ricreazione» – un genere di matematica che nella sua origine era tutt'altro che una ricreazione innocua, anzi era da considerarsi un aspetto essenziale e caratteristico del sapere matematico di tipo «sotto-scientifico».

È noto che la distribuzione geografica dei «problemi di ricreazione» non rispetta i limiti generalmente validi fra culture matematiche distinte – come le fiabe, essi sono distribuiti «fra

---

[*] La prima versione di questo saggio fu presentato al Seminario Matematico dell'Università di Siena il 10 gennaio 1997. Sfrutto l'occasione per ringraziare Laura Toti Rigatelli e Raffaella Franci per l'invito. Ringrazio anche Rossana Tazzioli per la correzione linguistica. Chiunque abbia cercato di correggere il testo di un altro sa che chi scrive resta il solo responsabile di eventuali errori.

[1] [Høyrup 1984: 7 e seg.].

[2] Un primo sviluppo sistematico viene presentato in [Høyrup 1990a]. Una presentazione più concisa ma più maturata, a cui la prima parte del saggio presente è assai vicina, è in [Høyrup 1997].

l'Irlanda e l'India»,[3] e talvolta si ritrovano persino in Cina.

La consueta conclusione è che questa distribuzione rifletta «arcivecchi rapporti culturali fra civiltà orientali ed occidentali».[4] Non c'è dubbio che questa conclusione sia giusta, ma non è per nulla sufficiente. Che precisamente *questi* problemi riflettano rapporti che sono molto meno vistosi in altre fonti (ivi comprese le fonti matematiche) si spiega soltanto attraverso le caratteristiche particolari dei vari tipi di attività matematica; al stesso tempo ciò mette in rilievo la nozione stessa di «culture matematiche» distinte.

I «problemi di ricreazione» sono «puri» nel senso che non trattano di vere applicazioni pratiche del sapere matematico, anche se parlano nell'idioma dell'uso quotidiano del calcolo:

> Sonno due chonpangni che ànno 8 uncie di balsimo in una anpolla che tiene 8 uncie e uolemo parttire questo balsimo chon due anpolle che ll'una tiene 5 oncie e ll'altra 3 [...]].[5]

Anche se sono di carattere «puro», però, il loro substrato è il mondo del *know-how*, del «saper-fare», non il mondo del sapere fine a se stesso. Che nell'antichità questi due mondi fossero separati e il saper-fare non fosse un sottoprodotto del sapere «teorico», ce lo dice Aristotele in questo passo della *Metafisica*:[6]

> Orbene, sotto il profilo strettamente pratico, sembra che l'esperienza non differisca affatto dall'arte, anzi noi vediamo che gli empirici conseguono anche un successo maggiore rispetto a quelli che si basano sulla sola ragione senza avere un'adeguata esperienza (e il motivo di ciò sta nel fatto che l'esperienza è conoscenza del particolare, mentre l'arte è conoscenza dell'universale, e tutte le attività pratiche e produttive si occupano del particolare, giacché il medico non ha sotto cura l'uomo se non in via accidentale, ma ha sotto cura Callia o Socrate o qualche altro individuo designato con tale appellativo e a cui è cosa accidentale essere uomo; se, pertanto, un medico non tiene conto dell'esperienza e si basa sul solo ragionamento, e conosce l'universale, ma ignora il particolare che è in esso, molte volte sbaglia la cura, perché è proprio il particolare quello che bisogna curare).

La valorizzazione sociale dei portatori dei due tipi di sapere – quello «produttivo» e quello «teorico» – viene descritta da Aristotele in un altro passo:[7]

> A buon diritto [...] l'inventore di una qualsiasi arte, la quale si distaccasse dal comune mondo delle sensazioni, è stato anzitutto ammirato dagli uomini non soltanto per l'utilità di qualcuna delle sue invenzioni, ma perché egli stesso è stato ritenuto sapiente ed eccellente rispetto agli altri; e a mano a mano che aumentavano di numero i ritrovati delle arti e alcune di queste erano in relazione con i bisogni della vita, altre con il piacere, gli uomini che si sono dedicati a queste ultime sono stati sempre considerati più sapienti degli altri, per il fatto che le loro conoscenze non hanno nulla a che fare con l'utilità. Di conseguenza, solo quando tutte le arti di tal genere si furono sviluppate, vennero alla luce quelle scienze che non hanno attinenza né col piacere né con i bisogni, e ciò si riscontrò in primo luogo in quei paesi dove gli uomini godevano gli agi della libertà; per questo motivo le arti matematiche fiorirono dapprima in Egitto, giacché colà veniva concessa un'agiata libertà alla casta dei sacerdoti. [...] sicché, come prima dicevamo, chi si basa sull'esperienza sembra essere più sapiente di chi si fonda su una qualsiasi semplice sensazione, e chi si basa sull'arte sembra essere più sapiente di chi si basa sull'esperienza, e il dirigente più del semplice manovale, e le attività

[3] «From Ireland to India», nelle parole di Stith Thompson [1946: 11].

[4] [Hermelink 1978, titolo]. Qui, come nel seguito salvo altre indicazioni, la traduzione è di chi scrive.

[5] *Rascionei d'Argorsmo* no 123, a cura di [Vogel 1977: 131].

[6] 981^{a}12–23, trad. [Russo 1973: 4 e seg.].

[7] 981^{b}13–33, trad. [Russo 1973: 5 e seg.].

teoriche sembrano superiori a quelle pratiche.

La distinzione fra sapere «produttivo» e sapere «teorico» vale in generale, almeno per quei campi del sapere dove è possibile parlare di «teoria» nel mondo pre-moderno, e non solo per la matematica. Ma essa sarà qui più palese che altrove e comporterà implicazioni specifiche riguardo alla matematica, particolarmente a causa dell'esistenza dei problemi «di ricreazione» e del loro ruolo nello sviluppo della matematica «teorica», e grazie all'esistenza già nell'antichità di un complesso di sapere scientifico assai coerente per formalizzare i risultati delle tradizioni pratiche – situazione del tutto differente se guardiamo, per esempio, alle «scienze» fisiche fino al tardo Rinascimento. Nel seguito, anche quando non viene detto esplicitamente, la matematica sarà quindi il punto focale della discussione.

Prima di approfondire le osservazioni che riguardano la matematica dobbiamo distinguere non solo fra orientamento «produttivo» e orientamento «teorico» ma anche fra *modi di trasmissione* del sapere produttivo. Uno dei modi è la trasmissione dal maestro al proprio apprendista, «sul posto di lavoro»; il tipo di sapere che ne risulta è quello che chiamo «sotto-scientifico», per ragioni che verranno spiegate poi; l'altro modo è la trasmissione all'interno di un'istituzione scolastica, dove l'addestramento è separato dalla pratica vera e propria e viene effettuato da maestri legati soltanto in modo alquanto approssimativo alla pratica a cui preparano gli allievi; ne risulta un tipo di sapere che denoterò «sapere scolastico» (la cultura degli scribi babilonesi ne è un esempio adeguato).

Occorre non identificare il «sapere dei pratici» (sia «sotto-scientifico» sia «scolastico») col solo «sapere pratico» o «applicato». La differenza deriva dalla funzione (che è anche costitutiva) del sapere all'interno del *sistema sociale* portatore del sapere in questione.

Va da sé che una parte importante del sapere professionale del pratico è applicabile nella prassi che definisce la professione, almeno secondo la convinzione dell'ambiente in cui questa prassi si svolge (che per noi sembri scientificamente illusorio molto del sapere dei medici seicenteschi non influisce sull'esistenza e sul prestigio della loro professionalità di allora). Riguardo a questa parte del sapere professionale, il ruolo dei *problemi* – cioè i problemi che definiscono la professione come professione pratica – è primario, e lo sviluppo di tecniche adatte per trattare questi problemi diviene una necessità derivata. L'addestramento dei futuri pratici, però, perfino quando viene svolto sul posto di lavoro, non può che cominciare con compiti più semplici di quelli che ci si aspettano una volta concluso l'apprendistato. L'addestramento perciò sarà in parte fatto sulla base di compiti preparati sopratutto allo scopo di allenare le tecniche che l'apprendista deve imparare ma che non sono rilevanti nei lavori realmente utili che si possono affidare a un principiante. In questo caso, le tecniche o i metodi diventano primari, e i problemi o compiti secondari, poiché derivano dalle tecniche e dai metodi che si intendono sviluppare. Chi possiede un minimo di familiarità con i libri scolastici di aritmetica elementare riconoscerà questa situazione, e la scuola è precisamente il luogo dove l'addestramento su problemi costruiti «su misura» prevalgono assolutamente. Nei sistemi maestro-apprendista, invece, anche se esistono problemi artificiali preparati sulla base di tecniche da trasmettere, c'è una tendenza a far lavorare l'apprendista nel modo più utile possibile, ossia di usare quanto possibile problemi «veri» benché semplici.

L'insegnamento scolastico spesso fa un uso moderato di problemi «di ricreazione»; essi rappresentano un modo per creare una varietà pedagogica, e per dimostrare che nell'insegnamento serio non manca sempre il piacere – almeno per quelli che svolgono valentemente il proprio lavoro. Nelle parole di Pier Maria Calandri:[8]

> Io credo certo che lo'ntelletto humano usando sempre una medesima cosa qualche volta, benché dilectevole fusse, gli verrebbe in fastidio et per non occhorrere in questo inconveniente, nel principio della nostra hopera, abbiamo detto nel presente capitolo trattare di qualche chaso piacevole, e' quali sono absoluti per varie reghole chome per li exempli si manifesterà.

Nella scuola i problemi in questione sono davvero «di ricreazione»; ma la scuola non è il loro proprio terreno.

Il vero domicilio di questi problemi che distorcono le situazioni quotidiane creando casi eccezionali o addirittura assurdi, sia per quanto riguarda l'invenzione sia per la trasmissione, è il sistema di sapere sotto-scientifico. I sistemi sotto-scientifici, infatti, corrispondono a una cultura di tipo orale, laddove la scuola dipende sempre dalla cultura scritta.[9] I problemi «di ricreazione» sono *enigmi per specialisti*, e hanno in comune con altri enigmi questa qualità contenziosa che caratterizza la cultura orale in genere.[10] Spesso, quando essi si ritrovano nelle antologie di problemi o in manuali per pratici (genere letterari ancora vicini alla cultura orale) vengono introdotti da frasi del tipo «Se sei un calcolatore perfetto, dimmi ...», o presentati come artifici che stupiranno i non-specialisti ignari. Nel mondo pre-moderno, invero, il sapere sotto-scientifico non era un sapere popolare, era un monopolio di pochi – e lo era forse in più alto grado di quanto non sia oggi il sapere basato sulle scienze.

Le frasi introduttive ci dimostrano la vera funzione dei problemi «di ricreazione», che non era essenzialmente ricreazionale; non più, almeno, dell'enigma potenzialmente letale della Sfinge. Essi servono per dimostrare *il virtuosismo*, cioè, servono in primo luogo per dimostrare che la professione in se è svolta da specialisti esperti, in secondo luogo per permettere ai singoli membri della categoria di mostrarsi, e di scoprire se stessi, calcolatori / agrimensori / architetti / ... perfetti.

Tale funzione determina il carattere dei problemi. Essi devono provocare un fascino immediato, ciò che spiega la «superficie ricreazionale»: Se un cammello trasporta una quantità di grano da un posto ad un altro, se è in grado di trasportare un terzo della quantità alla volta, e se sembra divorare esattamente *tutto* il grano durante il trasporto,[11] allora la soluzione «esperta» (che permette che ci sia un trasporto effettivo) può stupire; se fossero stati meno assurdi i numeri, allora la reazione probabile a un miglioramento soltanto di grado (diciamo,

---

[8] A cura di [Arrighi 1974: 105].

[9] È importante ricordarsi che settori di cultura orale e settori di cultura scritta coesisteranno per lungo tempo nella società tradizionale dove viene introdotta la scrittura – cfr. per esempio [Ong 1982: 93 e segg.].

[10] [Ong 1982: 43*ff* e *passim*]; v. anche [Koch 1995].

[11] «Un paterfamilias aveva due case, distanti l'una dall'altra 30 leghe, e un cammello che doveva trasportare da una casa all'altra 90 misure di grano in tre turni. Per ogni lega, il cammello mangiava sempre una misura. Dimmi, se vali qualcosa, quante misure restavano?» (*Propositiones ad acuendos iuvenes*, 52 versione II, a cura di [Folkerts 1978: 74]. Nella soluzione si chiede che il cammello faccia dapprima soltanto 20 leghe con le prime 30 misure, poi faccia un deposito delle 10 misure che restano, e ritorni per prendere altre 30 misure, ecc.; dopo tre turni si avranno 30 misure ad una distanza di 10 leghe dalla seconda casa, ciò che permette di trasportare 20 misure nette. Si vede facilmente che è possibile, invece, trasferire 25 misure se un primo deposito si fa dopo 10 leghe e un secondo dopo altre 15 leghe.

di 15 misure invece che di 10 misure) sarebbe un semplice «e allora?». Inoltre i problemi devono riferirsi alla pratica della professione – cantare anche con virtuosismo non aumenta il prestigio professionale di un calcolatore, al massimo permette barzellette spregevoli del tipo «il miglior cantante fra i calcolatori e il miglior calcolatore fra i cantanti». Perciò la *forma* dei problemi deve essere pratica. I problemi devono tuttavia essere più difficili di quelli che un modesto rappresentante qualsiasi della categoria sia in grado di risolvere senza difficoltà: questo, insieme alla caccia all'affascinante o all'assurdo, spiega che *la sostanza* dei problemi è pura o, meglio, «sopra-utilitaria», cioè, che essi restano distinti dalla pratica vera – più distinti difatti di quanto non siano i problemi semplificati nell'insegnamento scolastico.

Non meno dei problemi scolastici, inoltre, gli enigmi professionali– i cosiddetti «problemi di ricreazione»– sono determinati dai metodi, cioè, dalle tecniche caratteristiche della professione, da quelle abilità che vengono acquisite nell'addestramento e nel lavoro professionale. Spesso, come gli altri enigmi, esse dipendono anche da un artificio particolare - nel caso del cammello, dall'interruzione del viaggio in un luogo intermedio. Tale artificio sarà riconosciuto fra i professionisti e non fra i non adepti, e farà dunque parte anch'esso dell'arsenale delle tecniche della professione *nella sua esistenza sociale.*

Artifici di questo genere spesso non sono generalizzabili e servono soltanto per un tipo particolare di enigma. Per di più (come spiegano Abū Kāmil e altri matematici del Medioevo islamico), i pratici che ne facevano uso non conoscevano sempre la ragione del perché essi funzionassero. Ci dice Abū Kāmil, prima di analizzare il problema dei «cento uccelli»,[12] che questo è

> un calcolo particolare che fa il giro fra la gente signorile e il volgo, fra i dotti e fra gli ignoranti, che dà loro piacere, e che essi trovano nuovo e bello. L'uno chiede all'altro, e riceve una risposta approssimativa e congetturata; non si conoscono né princìpi né regole nella materia.[13]

Per Abū Kāmil, come per un matematico moderno, tale atteggiamento è inaccettabile, forse perfino scandaloso. Per i membri dell'ambiente sotto-scientifico, invece, era un uso normale e del tutto legittimo del sapere. Lo scopo dell'invenzione e della soluzione di questi problemi «sopra-utilitari» non era la conoscenza ma il mostrarsi virtuoso, era la spavalderia. Il livello sopra-utilitario del sapere sotto-scientifico non è quindi, né direttamente né in modo indiretto, un supporto per l'attività pratica, né una riflessione sui princìpi che governano e giustificano la prassi. Esso è pertanto di carattere del tutto differente sia dal sapere puro o «teorico» da cui parlano Aristotele o al-Fārābī, sia dalla nostra «scienza pura», in ultimo destinata – questo almeno si dice per difendere la sua utilità sociale – ad essere applicata dopo trasformazioni idonee.

Un effetto dell'orientamento particolare del sapere sopra-utilitario di tipo sotto-scientifico è perciò che manca ad esso la dinamica del sapere teorico o «scientifico», per cui in principio sono i problemi aperti a richiedere la creazione di nuovi metodi, tecniche ed astuzie – metodi ecc. che fanno ancora emergere nuovi problemi aperti, o fanno addirittura valutare insufficienti le vecchie soluzioni. Il sapere sotto-scientifico, finché rimane nell'ambiente di origine, può restare immutato per secoli o, come vedremo, per millenni. Non è l'esistenza del sapere in sé, neppure

[12] «Uno vuole spendere 40 denarj in 40 uciellj, di 3 ragionj cioè tordj, alodole e passore. Il tordo ghostj 3 denarj, e l'alodola 2 denarj, e 4 passore a denajo» (*Libro d'abaco* anonimo del sec. XIV, a cura di [Arrighi 1973: 34]); segue una variante con «100 Libre in 100 bestie grosse».

[13] Dalla traduzione tedesca di [Suter 1910: 100].

del sapere non direttamente legato all'uso pratico, che stimola dinamismo; è il sapere legato ad un certo atteggiamento riguardo al suo uso e scopo e condizionato da un ambiente sociale che impone tale atteggiamento.

Da questo punto di vista, e giudicato in relazione a un certo sistema di valori epistemologici (il nostro, ovviamente, non è un sistema che vale automaticamente in ogni cultura), può essere giustificata la caratterizzazione *sotto*-scientifica nella misura in cui il sapere che viene caratterizzato assomigli all'insieme di sapere tecnico e sapere teorico dell'epoca moderna, ma si tale che l'atteggiamento dell'ambiente nei riguardi della sua utilità (vi compresa utilità sociale) gli impedisca di svilupparsi come *sapere*.[14]

La metafora spaziale è però a doppio taglio, possiede un altro senso. Infatti, tutti i livelli del sistema di sapere sotto-scientifico, quello sopra-utilitario non meno che quello di uso pratico, sono spesso serviti da ispirazione per le varie matematiche scientifiche; non soltanto come base da cui esse si sono dapprima sviluppate, ma anche nelle loro fasi mature. In questo senso, il sistema sotto-scientifico è restato un substrato per il sistema scientifico – di solito un substrato anonimo e passato sotto silenzio.

L'uso di materiale di origine sotto-scientifica si può osservare nell'area greco-islamico, in India e in Cina.[15] Il *wasan* giapponese può persino rappresentare la conversione di un sistema sotto-scientifico in sistema proto-scientifico, sotto l'influenza di importazioni cinesi e nel contesto di una trasformazione corrispondente del sistema sociale portatore del sapere matematico.[16]

Nel mondo greco–islamico–pre-moderno europeo (il «mondo occidentale», se questo termine deve avere un senso storico e non soltanto il valore ideologico del discorso quotidiano), una tale conversione non fu mai possibile. Qui, come descritto da Aristotele, il sistema teorico era sempre socialmente segregato in un modo che in altre culture era riservata ad attività intellettuali diverse: In Giappone la musica cortese, in Cina la poesia mandarinesca strettamente legata al sistema di scrittura; entrambe le attività erano del tutto distinte dal cantare popolare, non-cortese e non-mandarinesco.

In «Occidente» (che, bisogna ricordarlo, va dall'Indus all'Atlantico), il prestigio particolare e la segregazione sociale del sapere filosofico e scientifico hanno fatto sì che la differenza fra sapere sotto-scientifico e sapere scientifico salti più agli occhi che altrove; o, piuttosto, che l'esistenza del sapere sotto-scientifico come sistema *per se* sia del tutto ignorata, e che i suoi

---

[14] Occorre interpretare in quest'ottica le regole parzialmente o completamente false che dà Piero della Francesca per le equazioni del terzo, quarto, quinto e sesto grado. Nella stessa ottica si vede che il conflitto fra Tartaglia e Cardano non è un semplice scontro fra caratteri spigolosi ma esprime una svolta storica: l'uso che voleva fare il primo del suo artificio apparteneva al mondo contenzioso del sistema sotto-scientifico; il diritto e il dovere di pubblicare risultati importanti (dando tutto il credito dovuto) facevano parte del sistema di valori della scienza, che era senza dubbio quello di Cardano.

[15] Per esempio, l'algebra sottile di Zhu Shijie (lo *Specchio di giada* del 1303) ha affinità evidenti con la tradizione degli agrimensori, di cui parleremo più avanti, esattamente su questioni che pare non abbiano radici nella tradizione cinese – v. [Martzloff 1988: 149–152]. Sembra plausibile che l'erudito matematico si sia lasciato ispirare da questa tradizione sotto-scientifica forse diffusa tramite reti stabilite nell'impero mongolo.

[16] V. [Horiuchi 1994: 23–31].

risultati siano visti solo come prodotti più o meno corrotti derivati dal sapere «vero». Questa è un'altra versione della teoria dei folkloristi romantici, cioè che fiabe e racconti popolari siano *gesunkenes Kulturgut*, i resti di letterature e grandi mitologie estinte, e che i veri rappresentanti della nazione siano dunque i bardi e i profeti del passato e il popolo volgare – i contadini stanchi, le nutrici maleducate con i loro racconti – un ignobile fango da cui bisogna estrarre i tesori prodotti dal «popolo vero».[17]

Anche senza questo disprezzo sarebbe difficile sapere molto sulla matematica pratica delle epoche pre-moderne. Essa non era di solito una materia sistematicamente affidata alla scrittura; i manuali scritti che esistevano non venivano copiati che in circostanze particolari,[18] e ancora più raramente erano copiati i calcoli fatti su ostraca o su pezzi di carta.[19]

Per di più, quando per caso qualche cosa è sopravvissuta, essa viene spesso mal interpretata. Da esempio può servire ciò che scrive Michael Mahoney nel *Dictionary of Scientific Biography* sulla *Geometrica* detta «di Erone». Essa viene considerata «essenzialmente» identica al libro I della *Metrica*.[20] Invece «la *Geometrica*» è costituita da due conglomerati diversi (mss A+C e mss S+V, rispettivamente) messi insieme da Heiberg nell'edizione critica; A+C contiene una breve contaminazione Eroniana, ma per il resto sia A+C sia S+V assomigliano al trattato di Erone solo per il fatto che anche Erone fa uso delle tradizioni sotto-scientifiche rappresentate nelle due *Geometrica*.[21]

Se è dunque difficile conoscere il contenuto della matematica pratica, diventa ancora più arduo seguire e separare le tradizioni attraverso cui essa è stata trasmessa. Di regola, le sue formule e le sue costruzioni geometriche sono troppo semplici per permetterci di distinguere fra invenzione indipendente e trasmissione – resta temerario affermare che gli Egiziani abbiano imparato dai Sumeri a raffigurare le persone con esattamente 10 dita.

Ciò nondimeno rimane possibile rintracciare nella matematica della scuola d'abbaco elementi che risalgono a tradizioni sotto-scientifiche più o meno identificabili e localizzabili, nonostante il passaggio attraverso la tradizione scritta araba e le interazioni anche con la matematica della scuola latina (una matematica che rappresenta veramente un *gesunkenes Kulturgut* e che, come matematica, non di rado ci sembra meno interessante di quella

[17] Almeno nella sua tendenza generale, l'ipotesi sull'origine della matematica che propone van der Waerden [1983] rispecchia il modo di pensare dei romantici. A parte questa differenza (e quelle che ne seguono), la sua tesi che le culture degli scribi abbiano sfruttato ispirazioni più vecchie ma anonime ha certe affinità con le idee qui proposte. Segue però una conseguenza importante dalla concezione romantica: in accordo con il prestigio di ogni casta sacra, la matematica pre-scribale dipinta da van der Waerden è una vera matematica, basata su conoscenze almeno proto-teoriche, una matematica cioè che non poteva che degradarsi quando fu adottata dagli scribi, filistei senza creatività agli occhi di un romantico.

[18] I pochi casi in cui ciò accadeva riguardano spesso culture con pretensioni scientifiche ma senza il potenziale necessario per capire testi scientifici – Bisanzio, l'Europa latina dopo la riforma carolingia.

[19] Dalla costruzione del Duomo di Milano sopravvive un solo calcolo – analizzato da Guy Beaujouan [1963]; da tanti altri lavori architettonici della stessa complessità non ci rimane neanche questo.

[20] [Mahoney 1972: 315].

[21] V. [Høyrup 1996b].

dell'abbaco, ma che rimane di tipo «teorico» o «scientifico».[22]

Un primo elemento è costituito dalle «frazioni continue ascendenti», espressioni del tipo «un terzo, e due quinti di un terzo»,

$$\frac{1+\frac{2}{5}}{3}\ .$$

Si sa bene che queste frazioni vengono descritte nel quarto capitolo del *Liber abbaci*, e che Leonardo introduce lì una notazione che era in uso nell'aritmetica della *madrasah* del Maghreb.[23]

Nella tradizione della scuola d'abbaco tali frazioni sopravvivono fino a quando le descrive Clavius;[24] Jordanus de Nemore vede che rappresentano una generalizzazione della notazione per posizione e cerca di naturalizzarle nella matematica latina e di collegarle alla tradizione dotta latina,[25] ma sembra che nessun altro scrittore abbia mai adottato il suo concetto di «frazioni dissimili», rimasto così particolare che Eneström ha frainteso il testo che stava pubblicando.[26]

Abitualmente, queste frazioni vengono considerate come un idioma particolare arabo. Invece, esse si ritrovano anche in vari testi babilonesi, sia del II che del I millennio avanti Cristo, come mezzo usato quando non bastano le suddivisioni metrologiche. Non conosco fonti in siriaco dove appaiono queste frazioni particolari, ma esse si ritrovano in alcuni testi greci che sono indubbiamente di ispirazione siriaca; ossia, in vari punti delle *Geometrica* (mai invece nella *Metrica*) e, in forma di parodia, in quegli epigrammi aritmetici dell'*Antologia greca* che riferiscono di tecniche legate al Vicino Oriente.[27]

C'è anche un solo esempio in un testo matematico dell'antico Egitto,, cioè nel problema 37 del Papiro Matematico Rhind:[28]

> Entro 3 volte nella misura hekat; un terzo di me mi viene aggiunto, un terzo di un terzo di me mi viene aggiunto, un nono di me mi viene aggiunto. Sono soddisfatto [cioè, il hekat è pieno]. Chi lo dice?

Un problema troppo simile per essere del tutto indipendente da questo si trova in una tavoletta babilonese del 1800 a. C. circa che appartiene a un gruppo di testi vicini alla tradizione non-scolastica:[29]

---

[22] Quest'osservazione ci ricorda che la dicotomia «scientifico» / «sotto-scientifico» è descrittiva e non comporta nessun giudizio di valore, né necessariamente una valutazione del livello matematico.

[23] A cura di [Boncompagni 1857: 24]; cfr. al-Qalaṣādī, *Kašf al-asrār ᶜan ᶜilm ḥurūf al-ġubār*, a cura di [Souissi 1988: 49].

[24] V. [Vogel 1982].

[25] V. [Høyrup 1988: 337 e seg.].

[26] [Enestrøm 1913: 44].

[27] V. [Høyrup 1990c: 298 e seg.] per quanto riguarda l'*Antologia greca*.

[28] Trad. inglese [Peet 1923: 74].

[29] [Baqir 1951: 37], interpretazione [von Soden 1952: 52]. Per riconoscere la similitudine fra il

Ai $^2/_3$ dei miei $^2/_3$ ho aggiunto 100 sìla [1 sìla ≈ 1 litro] di grano e ancora i miei $^2/_3$, e 1 gur [= 300 sìla] era completato.

La soluzione del problema egizio avviene in modo corretto e tipico per il Papiro Rhind. Quella babilonese, invece, non è affatto una soluzione ma una manipolazione di numeri che già presuppone la soluzione – una *Schimpfrechnung*, come la chiamerebbero i cossisti tedeschi del Cinquecento. Non c'è dubbio che il problema abbia viaggiato con gente pratica, portatrice di un sapere sotto-scientifico, gente che usava l'idioma delle frazioni continue ascendenti. Nell'Egitto, come spesso accadeva quando materiali di origine sotto-scientifica venivano adottati nella scuola o nella scienza, soltanto il problema venne acquisto, mentre la tecnica per risolverlo fu giudicata insoddisfacente (nel caso presente lo è veramente da ogni punto di vista matematico) e rigettata. In testi babilonesi un po' più tardivi, dove però sono scomparse anche le frazioni continue ascendenti, si verifica un'analoga normalizzazione.

Processi di questo genere dimostrano che non sono le culture «alte» della scuola o della scienza pre-moderna ad avere rapporti culturali fra di loro; anzi, i rapporti li avevano le comunità di pratici, da cui le culture alte prendevano il materiale per loro interessante, comunità le cui delimitazioni geografiche non coincidevano con quelle delle culture alte.

In tal caso, sembra consistere di mercanti di lingue semitiche la comunità che usava, già nei primi secoli del secondo millennio avanti Cristo, e ancora nel Medioevo, l'idioma delle frazioni continue ascendenti. Gruppi che entravano in contatto con questi mercanti hanno preso l'idioma in prestito, ma sempre con riluttanza quando la loro lingua non era di tipo semitico; si può constatere ciò in Egitto, in India e nella cultura greca della bassa antichità, come anche nell'Europa latino-italiana del tardo Medioevo.

Per mostrare che non tutto viene adottato ovunque conviene esibire come esempio una procedura che ho cercato invano in vari trattati d'abbaco. Si tratta di un modo particolare di esprimere la lunghezza di una circonferenza. Nei testi babilonesi, nei problemi dove essa si deduce dal diametro (si tratta sempre di testi piuttosto vicini alla tradizione non-scolastica), la circonferenza non si esprime mai come «3 volte il diametro», con la moltiplicazione che si usa negli stessi testi dove l'area viene trovata come 5 (cioè $^5/_{60}$) volte il quadrato della circonferenza. Il diametro viene invece «ripetuto fino a 3», o la circonferenza viene espressa come «il triplo del diametro» – operazioni che hanno entrambi un carattere ripetitivo.

Nella *Geometrica* appaiono varie formule che collegano il diametro d con la circonferenza c: $c = (22 \cdot d):7$; $c = (d:7) \cdot 22$; – e infine $c = 3d+{}^1/_7d$. In quest'ultimo calcolo, il valore di $3d$ viene sempre trovato separatamente, e $^1/_7d$ aggiunto dopo; inoltre, $3d$ viene anche qui espresso con un'operazione ripetitiva e mai tramite la moltiplicazione che si usa nelle altre formule. È difficile evitare la conclusione che è il calcolo babilonese (o piuttosto pre-babilonese) provvisto di una correzione archimedea, quello che ricorre nella formula greca. Che la correzione sia dovuta a pratici anonimi ce lo dice più o meno chiaramente Erone quando fa riferimento a coloro che assumono che la circonferenza sia «il triplo del diametro, e la settima parte in più».[30]

---

problema egizio e quello babilonese occorre ricordarsi che $^2/_3$ veniva considerata una «frazione semplice» allo stesso modo che $^1/_3$.

Per quanto riguarda la prossimità di certi testi babilonesi della tradizione non-scolastica, v. [Høyrup 1999].

30 *Metrica* I,31, a cura di [Schöne 1903: 74]. Erone, che conosce bene gli scritti di Archimede,

Nei trattati arabi che conosco si moltiplica invece direttamente per $3^{1}/_{7}$ senza difficoltà e la vecchia formula (sia corretta che non) sembra scomparsa. Come già detto, la stessa situazione sembra presentarsi nei trattati d'abbaco. La formula ricorre invece (con la correzione) nella *Geometria deutsch* di Mathes Roriczer del 1480 circa, sviluppata come procedura costruttiva:[31]

> Chi vuole fare dritto un tratto rotondo in modo che il tratto dritto e quello rotondo siano ugualmente lunghi, deve fare tre volte il rotondo uno accanto all'altro e poi dividere il diametro dell'ultimo dei tre cerchi in 7 parti uguali e aggiungere una parte.

Da *Geometria deutsch*, a cura di [Shelby 1977: 121].

L'uso di una tale procedura concreta è la causa probabile che una formula così caratteristica e inconsueta sia sopravvissuta per 3500 anni.

Geometria deutsch deriva dalla tradizione post-antica europea, quella degli edificatori delle cattedrali e dei monasteri. Il fatto che una formula che fu sempre presente in queste culture non si ritrovi nelle geometrie pratiche «di abbaco» è un argomento in più (ce ne sono altri, più forti) per riguardare la scuola d'abbaco come parte di un fenomeno pan-mediterraneo il cui nucleo si trovava nell'ambito islamico.

Altri aspetti della lingua e delle tecniche non sono abbastanza evidenti per permetterci di trarre conclusioni analoghe sulle loro origini e rapporti. Torniamo dunque agli enigmi matematici, i cosiddetti «problemi di ricreazione». Due gruppi distinti ci interessano.

Al primo appartengono, fra altri, «l'acquisto di un cavallo in comune»,[32] «i cento uccelli», e «il raddoppiamento dell'unità» fino a 30 o 64 volte.[33] Si sa che tutti si trovano nel Medioevo ovunque fra India e Fez,[34] e che la struttura caratteristica dell'acquisto del cavallo ricorre nei *Nove capitoli sull'aritmetica*[35] e nell'*Arithmetica* I.xxiv–xxv di Diofanto.

È meno noto che il primo libro della *Repubblica* di Platone sembra contenere (333b–c) un riferimento allo stesso problema – l'acquisto di un cavallo «in comune» è una situazione dove

---

è dunque testimone che la formulazione della – travisata – proposizione 2 della *Misura del cerchio* (dove la stessa frase viene usata) non è ad una contaminazione che risale alla tradizione pratica.

[31] *Geometria deutsch* no 9, a cura di [Shelby 1977: 120].

[32] «Doie huomene avendo d⟨enaro⟩ trovaro uno chavallo che se vendea, disse el primo al secondo: se tu me dàie $^{1}/_{3}$ degl tuoie d. chon gle denare ch'io àgio iio avero el preço del chavallo. Respuse el secondo e disse: se tu me dàie el $^{1}/_{4}$ degl. tuoie d., chon quigle ch'io agio, iio averò semeglamente. Adomandote el preço del chavallo e egl d. ch'ànno ciascuno» (esempio tratto da un *Livero de l'abbecho* umbro del secolo XIII, a cura di [Arrighi 1989: 68]).

[33] «Duplare uno granello de formento tante volte: quante che sonno casi bianche e nere in lo tauolieri da scachi: che sono 64 in tutto» [Pacioli 1523: 43r].

[34] V. per esempio [Tropfke / Vogel 1980].

[35] VIII.10,12,13, a cura di [Vogel 1968: 86 e seg.]. Anche se altri capitoli del trattato cinese risalgono ai secoli prima di Cristo, questo capitolo è del primo secolo dopo Cristo [Martzloff 1988: 118 e segg.].

c'è bisogno di un esperto. Poiché il «fiore di Tymaride» (un artificio per risolvere problemi differenti ma dello stesso genere[36]) risale anch'esso all'epoca di Platone, ci sono buone ragioni per credere che l'acquisto del cavallo sia stato già un problema celebre nel mondo mediterraneo verso il 400 avanti Cristo.

Come ha dimostrato Jean Christianidis,[37] un papiro greco-egiziano contiene una versione del problema dei 100 uccelli, benché in forma ancora immatura (100 unità, prezzo totale 2500), come se non si fosse ancora trovata la forma «giusta per stupire» – le 100 unità monetarie e i 100 uccelli. È perciò probabile che questo problema sia una creazione dell'epoca classica; poiché se ne trovano versioni simili anche in epoca più bassa, benché ciò non accade spesso, l'inferenza resta però ipotetica. In ogni caso se ne trovano già parecchi esempi in forma matura nelle *Propositiones ad acuendos iuvenes*[38] (un'antologia di problemi «di ricreazione» dell'età carolingia che forse è stata messa insieme da Alcuin e i cui singoli problemi circolavano presumibilmente in Gallia fin dalla tarda antichità), e anche nello *Zhang Qiujian suanjing* cinese del quinto (?) secolo.[39] È pertanto quasi certo che il problema abbia raggiunto la sua forma matura già nei primi secoli dopo Cristo.

Molto più vecchio è invece il raddoppiamento dell'unità. In un testo di Mari, una città a nord della Babilonia vera e propria, che risale a 1800 anni circa prima di Cristo[40], si tratta di grano, e la formulazione è additiva («ad ogni grano, un grano»); si va fino a 30 raddoppiamenti[41] e le grandi quantità sono espresse in unità metrologiche invece che in numero di grani. Lo stesso problema con argento invece di grano, ma con 30 raddoppiamenti e con l'uso di misure metrologiche, ricorre in un papiro greco-egiziano.[42] Nelle *Propositiones* ritroviamo la formula additiva, ancora con 30 raddoppiamenti ma senza unità metrologiche (già, perché si tratta di uomini). Negli stessi decenni al-Khwārizmī scrive un trattato, andato perduto, sul problema della scacchiera, con i suoi 64 raddoppiamenti; sia 30 sia 64 raddoppiamenti si ritrovano poi un po' dappertutto nel medio e basso Medioevo.

Sembra che questo gruppo di problemi appartenesse durante l'antichità e il Medioevo alla comunità di mercanti che viaggiavano attraverso la cosiddetta «Via della Sete» e ad altri gruppi locali legati a questa comunità. Come ho già detto, Diofanto fa uso dei suoi problemi nel primo libro dell'*Arithmetica*. Ma la stessa comunità può aver lasciato, sia a lui che alla matematica araba, anche *una tecnica* molto importante: l'algebra dell'*arithmós* / *šay*' / *res* usata per risolvere problemi di primo grado. Che questa algebra «della cosa» sia stata vista nel mondo dei calcolatori (almeno di quelli arabi) come diversa dall'algebra d'*al-jabr* è ovvio nel *Liber abbaci*, dove essa viene introdotta nella discussione del problema «dare e prendere» sotto il nome di *regula recta*, detta eccellente e in uso fra gli arabi.[43] Ma quello che fa Leonardo coincide

[36] V. [Heath 1921: I, 94]. È persino possibile trasformare il problema dell'acquisto del cavallo e dargli una forma che permetta l'uso del fiore di Tymaride.

[37] [Christianidis 1994: 240], cfr. testo in [Winter (cura) 1936: 39].

[38] A cura di [Folkerts 1978].

[39] V. [Martzloff 1988: 293 e seg.].

[40] A cura di [Soubeyran 1984: 30].

[41] Non è forse senza interesse ricordare che esisteva all'epoca una «scacchiera» con 30 scacchi.

[42] P. Ifao 88, a cura di [Boyaval 1971].

[43] A cura di [Boncompagni 1857: 203]. Nel seguito il nome ricorre spesso, sempre prima che

precisamente con il metodo usato da Diofanto per risolvere lo stesso problema nell'*Arithmetica* I.xv. Sembra più che probabile che Leonardo e le sue fonti abbiano davvero ragione e che *regula recta* e *al-jabr* siano veramente tecniche con origini distinte.[44]

L'altro gruppo che ci interessa ha una storia e un'origine diverse, ma anch'esso ha un rapporto indiretto con l'algebra. Esso risale ai geometri pratici (agrimensori, forse anche architetti ecc.) dell'Iraq non-sumerico del tardo terzo millennio prima di Cristo; forse tale gruppo era diffuso in un'area più vasta, nell'Iran e altrove, ma non ci sono fonti che lo confermano. Si tratta di un gruppo di enigmi geometrici che riguardano quadrati e rettangoli.[45] Se s indica il lato di un quadrato, Q la sua area, d la diagonale e ${}_4s$ «i quattro lati» o «tutti i lati», due enigmi originali su un solo quadrato sono

$$s+Q = 110 \qquad {}_4s+Q = 140 \;.$$

L'ordine dei membri indica che i lati sono menzionati prima dell'area, in accordo con un principio di valore generale per gli enigmi (matematici e, quando è rilevante, non-matematici); ossia, l'entità (negli enigmi matematici, la quantità) direttamente conoscibile viene presentata prima, le entità derivate poi. Verosimile è anche l'esistenza di problemi analoghi di tipo sottrattivo:

$$Q-s = p \qquad Q-{}_4s = q \qquad {}_4s-Q = r$$

e forse persino del problema matematicamente sbagliato

$$d-s = 4$$

– sbagliato nel senso che corrispondeva alla soluzione approssimativa d =14, s = 10 – e del problema[46]

$${}_4s = A \;.$$

Per due quadrati con aree Q_1 e Q_2, vengono posti i problemi seguenti:

$$Q_1+Q_2 = p \;,\;\; s_1\pm s_2 = q$$

e

$$Q_1-Q_2 = p \;,\;\; s_1\pm s_2 = q \;.$$

Per rettangoli con area A, lati l e w e diagonale d sembrano essere esistiti i problemi:

$$A = p \;,\;\; l\pm w = q$$

---

sia introdotta l'algebra d'*al-jabr*; si tratta sempre di algebra retorica di primo grado con una sola variabile (il *res*, arabo *šay*ʻ).

[44] Questa osservazione naturalmente non impedisce che le due tecniche fossero amalgamate da tempo quando il *Liber abbaci* fu scritto. Difatti, sono già fusi nel trattato di al-Khwārizmī.

[45] La scoperta (assai recente) di questa tradizione, le cui tracce si trovano dal 2000 prima di Cristo fino a Pedro Nuñez, viene descritta in [Høyrup 1996] e ancora in [Høyrup 1996a]. Poiché l'argomento è complesso, rinvio a queste pubblicazioni per una discussione più precisa; nel presente contesto ripeterò solo alcuni dei risultati.

[46] Questa possibilità non viene discussa nelle mie pubblicazioni precedenti, perché ho creduto che la sua presenza nelle fonti medioevali (*Liber mensurationum*, *Pratica geometrie*) potesse essere un fenomeno tardivo. Invece essa viene discussa nella *Theologumena arithmeticae* di pseudo-Nicomaco [Heath 1921: I, 96 e seg.], il che suggerisce un punto di partenza comune, e cioè la tradizione degli agrimensori. Per ragioni stilistiche sembra plausibile affermare che questo punto di partenza coincida con l'invenzione degli altri problemi su combinazioni dei quattro lati e l'area verso il 2000 a.C.

$$A+(l \pm w)= p \ , \ \ l \mp w= q$$
$$A = p \ , \ \ d = Q$$

e forse

$${}_2l+{}_2w = A \ , \ \ l–w = p$$

insieme a versioni alternativi di certuni dei problemi precedenti con «tutti i lati».[47]

Poiché i lati venivano visti como «linee larghe», cioè come provvisti di una larghezza virtuale 1 (un artificio che permette di identificare le loro lunghezze con le aree della stessa grandezza[48]), tutti i problemi hanno un senso geometrico. La somma dei quattro lati e l'area del quadrato, per esempio, si può rappresentare mediante una configurazione ben nota e descritta nell'*Algebra* di al-Khwārizmī (v. la prossima pagina):

Per risolvere il problema si aggiunge un quadrato 1×1 in ogni angolo. Così l'area completata sarà 144, il suo lato quindi 12; da questo vengono tolti i due pezzi aggiunti, ciò che lascia 10.

Non siamo in possesso di fonti dirette per tutto questo; l'ambiente degli agrimensori era un'ambiente non-scolastico e probabilmente orale che non ha lasciato niente di scritto (almeno, niente che sopravvive). Si possono avere informazioni soltanto in modo indiretto, per via di un'analisi approfondita e comparata delle varie tradizioni scientifiche e scolastiche che hanno sfruttato i suoi lasciti.

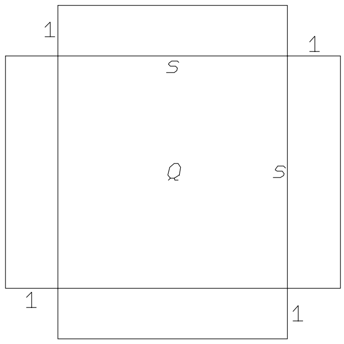
La prima di queste è la scuola paleobabilonese degli scribi, che va dal 1800 circa fino al 1600 prima di Cristo. Questa scuola, la prima di cultura babilonese anziché sumerica, prende possesso della piccola collezione di enigmi geometrici e ne crea una vera disciplina matematica – la cosiddetta «algebra babilonese» –, usando la stessa tecnica di separazione e riaggregazione degli agrimensori, ma introducendo anche metodi per trattare problemi non-normalizzati e l'idea di rappresentare problemi di natura non-geometrica in modo geometrico.

Talora è facile riconoscere l'origine extra-scolastica dei problemi scolastici, talora no; qualche volta è ovvio che un problema è un'invenzione della scuola. Un caso non-scolastico particolarmente evidente è un problema che nel contesto della tavoletta completa sembra essere un pezzo di folklore inserito lì per dimostrare che i metodi insegnati nei primi 22 problemi servono anche per i vecchi cari enigmi, trasformati (come sempre quando essi vengono adottati nell'ambiente

[47] Questa possibilità viene suggerita da una confronto fra fonti medioevali e Plutarco (*De Iside et Osiride* 42), v. citazione in [van der Waerden 1979: 401].

[48] Il concetto della «linea largha» e la sua diffusione in molte culture viene discusso in [Høyrup 1995].

scolastico) in «problemi di ricreazione»:[49]



> Riguardo a una superficie: Ho messo insieme i quattro fronti e la superficie [quadrata poiché caratterizzata da quattro «fronti»]: 41´40˝.
> 4, i quattro fronti, tu inscrivi. L'inverso di 4 è 15´.
> 15´ a 41´40˝ tu alzi [cioè, moltiplica], 10´25˝ tu inscrivi.
> 1, la sporgenza [cioè, la larghezza 1 che trasforma il lato o «fronte» in «linea larga»] tu aggiungi [infatti, è il complemento quadrato compreso fra due sporgenze che viene aggiunto]. 1°10´25˝ ha 1°5´ come lato.
> 1, la sporgenza che hai aggiunta, tu togli: 5´ fino a due
> tu ripeti: 10´ nindan [l'unità fondamentale per misure di lunghezza orizzontali] si confronta [come fronte della superficie quadrata].

Già la frase introduttiva, «Riguardo a una superficie», è un'ellissi per «Se qualcuno ti chiede così riguardo a una superficie» – un riferimento all'origine enigmistica (e alla funzione originale dell'enigma: sfida invece di ricreazione). Importante è anche l'ordine dei membri: con una sola eccezione, anche questa vicinissima agli enigmi, nessun altro problema babilonese, a parte il presente, parla dei lati prima dell'area. Degna di nota, infine, è la soluzione: nessun altro problema babilonese che tratta di un solo quadrato dà il lato come 10 (in nessun ordine di grandezza) – i valori preferiti sono 30´ e 30; 20´ è un'alternativa possibile ma piuttosto rara.

Dopo il 1600 sparisce l'istituzione della scuola degli scribi; sparisce anche l'algebra raffinata che aveva prodotto la scuola. Rimane invece la professione del geometro pratico, che per millenni si ritroverà dappertutto nel Vicino Oriente – Abū'l-Wafā' ne parla negli anni 990 dopo Cristo[50] come di un gruppo ben definito che, per problemi di tipo enigmistico (cambiare tre quadrati in un solo quadrato), fa ancora uso di tecniche di separazione e riaggregazione.

Rimangono anche gli enigmi quasi-algebrici. Nell'epoca tardiva riappare perfino in Babilonia un interesse «algebrico», e certi aspetti della terminologia dimostrano che la trasmissione si è diffusa attraverso un ambiente non-scolastico. Più interessante per noi è scoprire le tracce della quasi-algebra enigmistica nella cultura greca. Non è questa l'occasione per discutere il rapporto fra la cosiddetta «algebra geometrica» del libro II degli *Elementi* e la tradizione quasi-algebrica; basti dire che tutta la serie *Elementi* II.1–10 pare essere una «critica» in senso quasi-Kantiano dei metodi usati dagli agrimensori per risolvere gli enigmi quasi-algebrici, analizzando

---

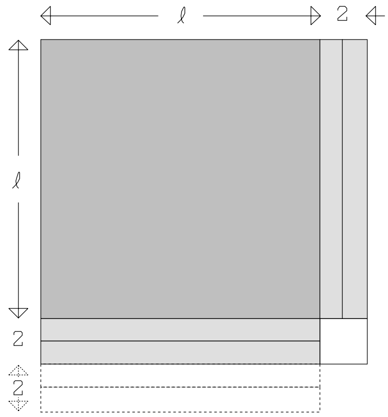
[49] BM 13901 no 23, a cura di [Neugebauer 1935: III, 4 e seg.]. Come vale per tutte le traduzioni di Neugebauer (e per altre traduzioni dell'«algebra babilonese» fatte prima del 1990), la traduzione nell'edizione presuppone un'interpretazione puramente aritmetica della tecnica, interpretazione oggi sorpassata. La traduzione offerta qui si fonda su un'interpretazione geometrica, la cui necessità è discussa per esempio in [Høyrup 1990]. I numeri, scritti nella tavoletta nel sistema di posizione a base 60, vengono trascritti in accordo con la notazione di Thureau-Dangin che, nel caso presente, coincide con la notazione familiare per gradi, minuti e secondi.

Il testo non procede esattamente come descritto sopra: invece di completare la figura cruciforme nei quattro angoli, si prende un quarto della configurazione completa, ciò che richiede soltanto un singolo complemento.

[50] *Libro su ciò che è necessario per l'artigiano nella costruzione geometrica* X.xiii, trad. russa [Krasnova 1966: 115].

perché e sotto quali condizioni essi sono giustificabili.

Il fatto che sia i problemi che i metodi tradizionali fossero conosciuti nel mondo greco trova conferma nella *Geometrica* pseudo-Eroniana (ms S), dove si trova il problema seguente (la figura non compare nel manoscritto dove vi è solo un quadrato, ma corrisponde al testo):



> Una superficie quadrata la cui area insieme al perimetro è 896 piedi. Occorre separare l'area e il perimetro. Faccio così: in generale [cioè, indipendentemente dal numero 896], poni fuori le quattro unità, di cui la metà diventa 2 piedi. Mettendo questo sopra se stesso diventa 4. Mettendo ora questo insieme a 896 diventa 900, il cui lato quadratizzante diventa 30 piedi. Ho tolto di sotto la metà, 2 piedi restano. Il residuo diventa 28 piedi. Così l'area è 784 piedi, e il perimetro sarà 112 piedi. Mettendo ora insieme tutto questo si avrà 896 piedi. Che l'area con il perimetro sia tanto, 896 piedi.[51]

Anche nel primo libro dell'*Arithmetica* di Diofanto si ritrovano problemi che sembrano provenire dalla tradizione quasi-algebrica. Come ho discusso altrove,[52] è persino possibile che il concetto del *dýnamis*, nella geometria il quadrato parametrizzato dal lato anziché dall'area, da Diofanto il nome della «potenza» (nella lingua moderna, seconda potenza) del numero incognito, sia un prestito (e la parola un calco) dalla tradizione del Vicino Oriente.

Nelle fonti del Medioevo islamico, la tradizione si fa sentire principalmente in due modi. Dapprima, al-Khwārizmī ha conosciuto gli enigmi e se ne serve quando trasforma la tecnica d'*al-jabr* in disciplina scientifica. Anche *al-jabr* era dapprima una tradizione sotto-scientifica, forse con radici nell'Asia centrale (Khwarezm? Turchestan?). Non siamo in grado di dire molto sulla sua forma prima della trasformazione effettuata da al-Khwārizmī, soltanto che era già in qualche modo amalgamata con l'algebra del *res*. Possiamo però sapere che il suo nucleo consisteva in un gruppo di problemi su una quantità monetaria (*māl*, «un avere») e la sua radice quadrata. Nella loro origine essi erano enigmi ma, già al tempo di al-Khwārizmī, erano visti come paradigmi standardizzati per risolvere problemi numerici di secondo grado.[53] L'esempio che dà al-Khwārizmī del primo caso misto (esempio che nell'algebra italiana e latina sarà ripetuto fino al Cinquecento) è che la somma dell'avere e di dieci sue radici sia uguale a 39 dirhem; nella tradizione che conosce al-Khwārizmī esso viene risolto tramite un algoritmo senza prova né argomentazione: «dimezza le radici [5], moltiplica la metà con se stessa [25], aggiungi il risultato ai dirhem [25+39= 64], prendine la radice [8], taglia la metà delle radici [8–5= 3], questo sarà la radice dell'avere, e l´avere stesso sarà il prodotto della radice con se stesso [9]».

---

[51] A cura di [Heiberg 1912: 418].

[52] [Høyrup 1990b].

[53] I problemi parlano prima dell'avere, dopo della radice. Quest'ordine riflette il carattere enigmistico dei problemi: dapprima viene menzionata la grandezza direttamente conoscibile (l'avere), dopo la grandezza derivata da essa (la sua radice quadrata). Dopo l'interpretazione della radice dell'avere come «radice dell'equazione» e dell'avere stesso come seconda potenza della radice, l'ordine, senza essere cambiato, diventa quello a noi familiare: dapprima la seconda, poi la prima potenza.

Quando gli fu chiesto dal califfo al-Ma'mūn di scrivere un'introduzione a questa tecnica, al-Khwārizmī fece di più: egli trasformò il soggetto in matematica scientifica, arricchendolo di dimostrazioni. Egli non usò per questo scopo (come avrebbero fatto più tardi Thābit ibn Qurrah et Abū Kāmil) i teoremi degli *Elementi* II ma applicò invece la fonte originale, ossia la tecnica degli enigmi degli agrimensori. La sua prima dimostrazione viene invero dalla soluzione del problema dei quattro lati e dell'area vista sopra.

A lungo andare, il trattato di al-Khwārizmī fece dimenticare ciò che era esistito prima, e le dimostrazioni geometriche vennero considerate il nucleo stesso della disciplina. Quando essa fu adottata da Leonardo, egli presentò persino *māl*/*census* (l'avere) come un'altra parola per il quadrato geometrico – cioè il quadrato che nelle dimostrazioni *rappresentava* il *māl*, una volta quantità monetaria, poi genericamente numerica. La radice – per al-Khwārizmī ancora un numero, la radice quadrato del *māl* – fu presentata da Leonardo come una linea larga.[54]

La prima dimostrazione geometrica di al-Khwārizmī, a cura di [Mušarrafah & Aḥmad 1939: 22].

Ci sono però influenze ancora più dirette della vecchia tradizione geometrica sul mondo islamico. Una fonte dove ciò si vede è il *Liber mensurationum*[55] di un certo Abū Bakr, un trattato che ci è stato trasmesso soltanto nella traduzione latina di Gherardo da Cremona, ma che potrebbe risalire alla prima parte del nono secolo. Lì si ritrovano pressappoco tutti i vecchi problemi, ivi compreso «i quattro lati e l'area», con i lati menzionati prima e con lato 10. Ma anche la *Collezione* (o *Liber embadorum*) di Savasorda ne contiene una grande parte; fra i pochi trattati arabi di calcolo pratico che sono stati pubblicati, in almeno uno (la *Ricchezza del calcolatore* di ibn Thabāt, del primo Duecento) se ne trovano alcuni. È dunque assai probabile che i vecchi enigmi abbiano conosciuto ampia diffusione.

Nel mondo italiano essi sembrano entrare attraverso la *Pratica geometrie* del 1220 di Leonardo Fibonacci. È facile mostrare che Leonardo abbia sfruttato la traduzione del *Liber mensurationum* fatta da Gherardo, e verosimilmente il *Liber embadorum*. È anche pressappoco certo che egli abbia ricevuto ispirazioni dirette dal mondo islamico in questo come in altri campi; alternativamente, egli ha dovuto riscoprire vecchie tecniche geometriche che non vengono esposte nelle due fonti riconoscibili.

Nella *Pratica geometrie*, il problema dei quattro lati e l'area serve come paradigma generale

[54] *Pratica geometrie* III.ii, a cura di [Boncompagni 1862: 56 e seg.]. Nel *Liber abbaci*, invece, Leonardo identifica il *census* con un quadrato ma, almeno così sembra essere il significato, con un *numero quadrato*, poiché i quadrati *geometrici* vengono designati *quadrilateri* [a cura di Boncompagni 1857: 406, 408].

[55] A cura di [Busard 1968].

per il primo caso misto d'*al-jabr* – «avere più radici uguali a numero».[56] Forse per questa ragione, forse per volontà generica di «normalizzazione» e perché non vede ragioni di distinguere fra quasi-algebra e algebra d'*al-jabr*, in ogni caso Leonardo cambia l'ordine dei membri e parla della «superficie [quadrata] e i suoi quattro lati».[57]

Anche Piero della Francesca nel suo *Trattato d'abaco*[58] sceglie «i quattro lati e l'area» più o meno come paradigma; è ovviamente possibile che sia stato ispirato per questo da Leonardo, ma il suo modo di esprimersi – «giunge» l'area ai quattro lati (che dobbiamo perciò immaginarci già presenti) mentre tutti gli altri fanno un'operazione simmetrica – suggerisce un'ispirazione più diretta dal mondo arabo. Merita un'analisi più profonda di quella sviluppata finora il fatto che gli altri problemi quasi-algebrici vengano presentati tutti insieme, e molto più avanti nel trattato, ossia nella parte geometrica.

Luca Pacioli tratta l'algebra nel penultimo capitolo della prima parte della *Summa de arithmetica*. Lì egli segue lo stile ortodosso derivato da al-Khwārizmī – per esempio, il paradigma per il primo caso misto è lo stesso di quello di al-Khwārizmī e del *Liber abbaci*.[59] Poi, nella seconda parte (quella geometrica), egli afferma[60] che

> Benche nela parte de arithmetica dicessimo de la regola dalghebra assai copiosamente: Niente dimeno e necessario alcuna cosa qui dirne.

Ciò che segue è tratto dalla *Pratica de geometrie* di Leonardo, e perciò potrebbe sembrare essere di scarso interesse per noi. Al contrario è interessante: Pacioli (o piuttosto il trattato di geometria che segue[61]) ritorna all'ordine originale dei membri; per di più, egli corregge altrove un passo che era stravolto già nella traduzione di Gherardo del *Liber mensurationum*, e che Leonardo non ha saputo correggere benché si mostra consapevole del fatto che qualcosa non sia giusto. Tuttavia la correzione fatta da Pacioli è solo parziale, il che significa che non si tratta di una correzione dovuta alla completa comprensione dell'errore, ma dell'uso di un originale migliore di quello utilizzato da Gherardo e di certo diverso dalla fonte usata da Piero.

L'Europa latino-italiana ha dunque avuto conoscenza degli enigmi quasi-algebrici non soltanto tramite Abū Bakr / Gherardo e Savasorda ma anche per via di ispirazioni fino ad oggi non identificate – ispirazioni che si riflettono almeno nel lavoro di Piero, nella seconda parte della *Summa de arithmetica* e, probabilmente, anche nella *Pratica* di Leonardo. Evidentemente ci resta tanto da imparare sui rapporti fra la tradizione italiana e quella del Mediterraneo islamico, come ci resta molto da imparare sulle tradizioni sotto-scientifiche del mondo islamico stesso, tradizioni di rado considerate veramente degne di interesse da parte degli storici della matematica.

---

[56] Nel *Liber abbaci*, invece, la descrizione è più ortodossa, cioè, più vicino allo stile di al-Khwārizmī e di Abū Kāmil.

[57] A cura di [Boncompagni 1862: 59].

[58] A cura di [Arrighi 1970: 122].

[59] Dist. 8, tratt. 5, [Pacioli 1523: I, 145^{v}].

[60] Dist. 3, cap. 1, [Pacioli 1523: II, 15^{r}].

[61] Infatti, Pacioli sfrutta un manoscritto anonimo (Biblioteca nazionale di Firenze, codice Palatino 577) derivato dalla *Pratica geometrie*, v. [Picutti 1989: 76], benché con certe correzioni. Per decidere se sia Pacioli o l'intermediario anonimo (che Picutti identifica in modo ipotetico con Benedetto da Firenze) ad avere corretto Leonardo occorre esaminare il manoscritto.

Bibliografia

Arrighi, Gino (a cura di), 1970. Piero della Francesca, *Trattato d'abaco*. Dal codice ashburnhamiano 280 (359*–291*) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze. (Testimonianze di storia della scienza, 6). Pisa: Domus Galileana.

Arrighi, Gino (a cura di), 1973. *Libro d'abaco*. Dal Codice 1754 (sec. XIV) della Biblioteca Statale di Lucca. Lucca: Cassa di Risparmio di Lucca.

Arrighi, Gino (ed.), 1974. Pier Maria Calandri, *Tractato d'abbacho*. Dal codice Acq. e doni 154 (sec. XV) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze. Pisa: Domus Galiaeana, 1974.

Arrighi, Gino (a cura di), 1989. "Maestro Umbro (sec. XIII), *Livero de l'abbecho*. (Cod. 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze). Con introduzione". *Bolletino della Deputazione di Storia Patria per l'Umbria* **86** (1989), 5–140.

Baqir, Taha, 1951. "Some More Mathematical Texts from Tell Harmal". *Sumer* **7**, 28–45.

Beaujouan, Guy, 1963. "Calcul d'expert, en 1391, sur le chantier du Dôme de Milan". *Le Moyen Age* **69**, 555–563.

Boncompagni, Baldassare (a cura di), 1857. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. I. Il *Liber abbaci* di Leonardo Pisano. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Boncompagni, Baldassare (a cura di), 1862. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. II. *Practica geometriae* et *Opusculi*. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Boyaval, B., 1971. "Le P. Ifao 88: Problèmes de conversion monétaire". *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik* **7**, 165–168, Tafel VI.

Busard, H. L. L. (a cura di), 1968. "L'algèbre au moyen âge: Le «Liber mensurationum» d'Abû Bekr". *Journal des Savants*, Avril-Juin 1968, 65–125.

Christianidis, Jean, 1994. "On the History of Indeterminate Problems of the First degree in Greek Mathematics", pp. 237–247 *in* Kostas Gavroglu, Jean Christianidis & Efthymois Nicolaidis (a cura di), *Trends in the Historiography of Science*. (Boston Studies in the Philosophy of Science, 151). Dordrecht etc.: Kluwer.

Eneström, Georg, 1913. "Das Bruchrechnen des Nemorarius". *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge **14** (1913–14), 41–54.

Folkerts, Menso (a cura di), 1978. "Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition". *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften*, 116. Band, 6. Abhandlung.

Heath, Thomas L., 1921. *A History of Greek Mathematics*. 2 vols. Oxford: The Clarendon Press.

Heiberg, J. L. (cura, trad.), 1912. Heronis *Definitiones* cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur *Geometrica*. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, IV). Leipzig: Teubner.

Hermelink, Heinrich, 1978. "Arabic Recreational Mathematics as a Mirror of Age-Old Cultural Relations Between Eastern and Western Civilizations", pp. 44–52 *in* A. Y. al-Hassan, Ghada Karmi & Nizar Namnum (a cura di), *Proceedings of the First International Symposium for the History of Arabic Science*, *April 5–12, 1976*. Vol. II, Papers in European Languages. Aleppo: Institute for the History of Arabic Science, Aleppo University.

Horiuchi, Annick, 1994. *Les mathématiques japonaise à l'époque d'Edo (1600–1868): Une étude des travaux de Seki Takakazu (?–1708) et de Takebe Katahiro (1664–1739)*. Paris: J. Vrin.

Høyrup, Jens, 1984. "Formative Conditions for the Development of Mathematics in Medieval Islam". Contribution to the George Sarton Centennial, University of Ghent, 14–17 November 1984. Preliminary version. Roskilde: Roskilde University Centre, Institute of Educational Research, Media Studies and Theory of Science.

Høyrup, Jens, 1988. "Jordanus de Nemore, 13th Century Mathematical Innovator: an Essay on Intellectual Context, Achievement, and Failure". *Archive for History of Exact Sciences* **38**, 307–363.

Høyrup, Jens, 1990. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* **17**, 27–69, 262–354.

Høyrup, Jens, 1990a. "Sub-Scientific Mathematics. Observations on a Pre-Modern Phenomenon". *History of Science* **28**, 63–86.

Høyrup, Jens, 1990b. "*Dýnamis*, the Babylonians, and Theaetetus 147c7—148d7". *Historia Mathematica* **17**, 201–222.

Høyrup, Jens, 1990c. "On Parts of Parts and Ascending Continued Fractions". *Centaurus* **33**, 293–324.

Høyrup, Jens, 1995. "Linee larghe. Un'ambiguità geometrica dimenticata". *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche* **15**, 3–14.

Høyrup, Jens, 1996. "'The Four Sides and the Area'. Oblique Light on the Prehistory of Algebra", pp. 45–65 *in* Ronald Calinger (a cura di), *Vita mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*. Washington, DC: Mathematical Association of America. [Contiene molti errori di stampa, dacché l'editore non ha fatto correggere le bozze.]

Høyrup, Jens, 1996a. "«Les quatre côtés et l'aire» – sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes traditions mathématiques savantes", pp. 192–224 *in* E. Gallo, L. Giacardi & C. S. Roero (a cura di), *Associazione Subalpina Mathesis. Seminario di Storia delle Matematiche "Tullio Viola". Conferenze e Seminari 1995–1996*. Torino: Associazione Subalpina Mathesis.

Høyrup, Jens, 1996b. "Hero, Ps-Hero, and Near Eastern Practical Geometry. An Investigation of *Metrica*, *Geometrica*, and other Treatises". *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter*. 3. Række. *Preprints og Reprints*, 1996 nr. 5.

Høyrup, Jens, 1997. "Mathematics, Practical and Recreational", in corso di pubblicazione *in* Helaine Selin (a cura di), *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*. Dordrecht: Kluwers, 1997.

Høyrup, Jens, 1999. "The Finer Structure of the Old Babylonian Mathematical Corpus. Elements of Classification, with some Results", pp. 117–177 *in* Joachim Marzahn & Hans Neumann (eds), *Assyriologica et Semitica*. Festschrift für Joachim Oelsner. (Altes Orient und Altes Testament, Band ?) Kevelaer: Butzon & Bercker / Neukirchen-Vluyn: Neukirchener Verlag (in corso di pubblicazione).

Koch, Ludovica, 1995. "«Fiamma da fiamma s'infiamma». Sulle domande, sui silenzi e sulla teoria della conoscenza nell'epica germanica". *Studi Germanici*, n.s. **30–31** (1992–1993; ma 1995), 9–43.

Krasnova, S. A. (cura, trad.), 1966. "Abu-l-Vafa al-Buzdžani, *Kniga o tom, čto neobxodimo remeslenniku iz geometričeskix postroenij*", pp. 42–140 *in* A. T. Grigor'jan & A. P. Juškevič (a cura di), 1966. *Fiziko-matematičeskie nauki v stranax vostoka*. Sbornik statej i publikacij. Vypusk I (IV). Moskva: Izdatel'stvo »Nauka«.

Mahoney, Michael S., 1972. “Hero of Alexandria: Mathematics”, *in Dictionary of Scientific Biography* VI, 314–315. New York: Scribner.

Martzloff, Jean-Claude, 1988. *Historie des mathématiques chinoises*. Paris: Masson.

Mušarrafa, ʿAlī Mustafā, & Muḥammad Mursī Aḥmad (a cura di), 1939. al-Khwārizmī, *Kitāb al-muḫtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābalah*. Caïro, 1939. Ristampa 1968.

Neugebauer, O. (cura, trad.), 1935. *Mathematische Keilschrift-Texte*. 3 vol. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster-dritter Teil). Berlin: Julius Springer, 1935, 1935, 1937.

Ong, Walter J., 1982. *Orality and Literacy. The Technologizing of the Word*. London & New York: Methuen.

Pacioli, Luca, 1523. *Summa de Arithmetica geometria Proportioni: et proportionalita*. Novamente impressa. Toscolano: Paganinus de Paganino. [1]1494.

Peet, T. Eric (cura, trad.), 1923. *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058*. Introduction, Transcription, Translation and Commentary. London: University Press of Liverpool.

Picutti, Ettore, 1989. “Sui plagi matematici di frate Luca Pacioli”. *Le Scienze* **40**:246 (febbraio 1989), 72–79.

Ross, W. D. (cura, trad.), 1928. Aristotle, *Metaphysica*, *in* Aristotle, *Works* (ed. W. D. Ross), vol. VIII. [2]Oxford: Clarendon Press.

Russo, Antonio (cura, trad.), 1973. Aristotele, *Opere*, volume sesto, *Metafisica*. Roma & Bari: Laterza.

Schöne, Hermann (cura, trad.), 1903. Herons von Alexandria *Vermessungslehre* und *Dioptra*. Griechisch und deutsch. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, vol. III). Leipzig: Teubner.

Shelby, Lon R. (cura, trad.), 1977. *Gothic Design Techniques. The Fifteenth-Century Design Booklets of Mathes Roriczer and Hanns Schmuttermayer*. Carbondale & Edwardsville: Southern Illinois University Press.

Soubeyran, Denis (cura, trad.), 1984. “Textes mathématiques de Mari”. *Revue d'Assyriologie* **78**, 19–48.

Souissi, Mohamed (cura, trad.), 1988. Qalaṣādī, *Kašf al-asrār ʿan ʿilm hurūf al-ġubār*. Carthage: Maison Arabe du Livre.

Suter, Heinrich (cura, trad.), 1910. “Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmil al-Miṣrī”. *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge **11**, 100–120.

Thompson, Stith, 1946. *The Folktale*. New York: The Dryden Press.

Tropfke, J. / Vogel, Kurt, et al, 1980. *Geschichte der Elementarmathematik*. 4. Auflage. Band 1: *Arithmetik und Algebra*. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin & New York: W. de Gruyter.

van der Waerden, B. L., 1979. *Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*. Zürich & München: Artemis Verlag.

van der Waerden, B. L., 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin etc: Springer Verlag.

Vogel, Kurt (cura, trad.), 1968. *Chiu chang suan shu. Neun Bücher arithmetischer Technik. Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v. Chr. bis 9 n. Chr.)*. (Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften. Neue Folge, Band 4). Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Vogel, Kurt (cura, trad.), 1977. *Ein italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia X 511 A13)*. (Veröffentlichungen des Deutschen Museums für die Geschichte der Wissenschaften und der Technik. Reihe C, Quellentexte und Übersetzungen, Nr. 33). München.

Vogel, Kurt, 1982. “Zur Geschichte der Stammbrüche und der aufsteigenden Kettenbrüche”. *Sudhoffs Archiv* **66**, 1–19.

von Soden, Wolfram, 1952. “Zu den mathematischen Aufgabentexten vom Tell Harmal”. *Sumer* **8**, 49–56.

Winter, J. G. (cura, trad.), 1936. *Michigan Papyri*. Vol. III. *Miscellaneous Papyri*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

The sub-scientific heritage in "abbaco" mathematics: quasi-algebra and other queer species[*]

Jens Høyrup

Roskilde University, Denmark

In an Italian context, there is no need to argue for the importance of practical mathematics for the history of mathematics; the work of Italian colleagues is, indeed, one of the most important sources for my interest in elucidating the intertwinement of theoretical development and practical activities in the pre-Modern epoch. No doubt, even my experience as a young physics teacher for students of civil engineering is part of my inspiration (an observation which perhaps pertains to the scholar's psychoanalysis, but then at least to the part that can be publicly confessed). I suppose I shall never forget the struggle it took to shape the knowledge I possessed as a theoretician in such a way that it might enter in dialogue with the knowledge, the professional needs and the motivation of students who only wanted to calculate when it was really necessary (and purposeful) to calculate; I learned even more from the resistance of certain colleagues who looked upon my attempts of dialogue between types of knowledge as utterly dangerous and outrageous extremism (left-wing extremism, of course – we were in the early seventies).

From then, some fifteen years passed before I had the impression to understand fairly well the relation between the various types of knowledge. In 1984, I had still spoken of the knowledge of practitioners as "folk knowledge";[1] only when I tried to understand the correlation between the science of medieval Islam and its sources did the notion of "sub-scientific knowledge" begin to crystallize. In the following pages I shall first present this notion,[2] approaching it indirectly through so-called "recreational mathematics" – a type of mathematics which originally is anything but an innocent recreation, but instead to be understood as one of the essential and distinctive aspects of the "sub-scientific" type of mathematics.

---

[*] The first version of this essay was presented to the Mathematical Seminar of the University of Siena 10 January, 1997. I use the opportunity to express my gratitude to Laura Toti Rigatelli and Raffaela Franci for inviting me. I am also thankful to Rossana Tazzioli for correcting my Italian; whoever has tried to correct the text of another will know that the author remains sole responsible for all errors.

The English version is my own translation from the Italian original.

[1] [Høyrup 1984: 7*f*].

[2] The argument was first presented systematically in [Høyrup 1990a]. A shorter but more developed version, from which the first part of the present essay has borrowed much, is [Høyrup 1997].

It is a familiar fact that the geographical distribution of the "recreational problems" does not respect the established boundaries between distinct mathematical cultures – as folk tales, they range "from Ireland to India"[3], and sometimes turn up even in China.

The habitual inference is that this distribution reflects "Age-Old Cultural Relations Between Eastern and Western Civilizations".[4] This is certainly right, but it does not exhaust the matter. That precisely *these* problems mirror relations that are much less conspicuous in other sources (including mathematical sources) can only be explained if we take into account the particular characteristics of the various types of mathematical activity; this also puts the very notion of "mathematical cultures" in a new perspective.

The "recreational problems" are "pure" in the sense that they do not deal with genuine practical uses of mathematical knowledge, however much they speak in the language of everyday applied computation:

> Two partners have 8 ounces of balsam in a flask that contains 8 ounces and want to share this balsam by means of two flasks of which one contains 5 ounces and the other 3. [...][5]

In spite of their "pure" character, however, their substratum is the world of know-how, not the world of knowing for its own sake. That these two worlds were distinct in antiquity and know-how no derivative from "theoretical" knowledge is explained by Aristotle in this passage from the *Metaphysics*:[6]

> With a view to action experience seems in no respect inferior to art, and men of experience succeed even better than those who have theory without experience.
>
> (The reason is that experience is knowledge of individuals, art of universals, and actions and productions are all concerned with the individual; for the physician does not cure man, except in an incidental way, but Callias or Socrates or some other called by some such individual name, who happens to be a man. If, then, a man has the theory without the experience, and recognizes the universal but does not know the individual included in this, he will often fail to cure; for it is the individual that is to be cured.)

The social status of the carriers of the two types of knowledge – "productive" and "theoretical" – is described by Aristotle in another passage:[7]

> At first he who invented any art whatever that went beyond the common perceptions of man was naturally admired by men, not only because there was something useful in the inventions, but because he was thought wise and superior to the rest. But as more arts were invented, and some were directed to the necessities of life, others to recreation, the inventors of the latter were naturally always regarded as wiser than the inventors of the former, because their branches of knowledge did not aim at utility. Hence when all such inventions were already established, the sciences which

[3] "From Ireland to India", in Stith Thompson's words [1946: 11*ff*].

[4] [Hermelink 1978, the title]. Here, as in everywhere the following when nothing else is indicated, the translation is mine.

[5] *Rascionei d'Argorsmo* no. 123, ed. [Vogel 1977: 131].

[6] 981^a12–23, trans. [Ross 1928].

[7] 981^b13–33, trans. [Ross 1928].

> do not aim at giving pleasure or at the necessities of life were discovered, and first in the places where men first began to have leisure. This is why the mathematical arts were founded in Egypt; for there the priestly caste was allowed to be at leisure.
>
> [...] so that, as has been said before, the man of experience is thought to be wiser than the possessors of any sense-perception whatever, the artist wiser than the men of experience, the masterworker than the mechanic, and the theoretical kinds of knowledge to be more of the nature of Wisdom than the productive.

The distinction between "productive" and "theoretical" knowledge is of general validity, at least in fields where it is meaningful to speak of "theory" in the pre-Modern world, and not only within mathematics. But the distinction will be more obvious here than elsewhere, and it has particular implications for mathematics, not least because of the existence of the "recreational problems" and of their role for the development of "theoretical" mathematics, and due to the existence already in Antiquity of a body of scientific knowledge that was sufficiently coherent to formalize the results of the practical tradition – wholly different, for instance, than the situation of the physical "sciences" until the late Renaissance. In what follows, even when it is not stated explicitly, *mathematics* will thus be the focus of the discussion.

Before elaborating the observations that have to do with mathematics we shall have to distinguish not only between the "productive" and the "theoretical" stance but also between two *modes of transmission* of productive knowledge. One is the "on-the-job" transmission from the master to his own apprentice; the type of knowledge that results is the one I characterize as "sub-scientific", for reasons that will be explained; the other mode is the transmission within a school institution, where training is cut off from genuine practice and taken care of by masters with only rather indirect links to that practice for which they prepare their students; the outcome is a type of knowledge which I shall call "scolasticized knowledge"; the culture of the Babylonian scribes is an appropriate example.

It is important not to identify the "knowledge of practitioners" (whether "sub-scientific" or "scolasticized") with "practical" or "applied" knowledge alone. The difference comes from the function (indeed a constitutive function) of knowledge for the *social system* that carries the knowledge in question.

Evidently, much of the professional knowledge of the practitioner is applicable within the practice that defines the profession, at least according to the convictions of the environment within which this practice takes place (that *we* find much of the knowledge of seventeenth-century physicians scientifically mistaken of course does not affect the existence and the prestige of their profession at the time). As regards this part of the professional knowledge, the role of *problems* – that is, the problems that define the profession as a practical profession – is primary, and the creation of techniques that permit to solve these problems is a derived necessity. However, even when made on the job, the training of future practitioners has to start from simpler tasks than the ones that will be waiting once training has been completed. For this reason, training will be based to some extent on tasks that are first of all chosen with the aim of drilling the techniques the apprentice has to learn, but which are not relevant for that kind of really useful work which can be handed over to a beginner. In this case, techniques or methods become primary, and the problems or tasks secondary, derived from the techniques and methods that are to be exercised. Whoever possesses a modicum of familiarity with school books on elementary arithmetic will recognize the situation, and the school is the very place where training on problems constructed "to measure" prevails completely. In the master-apprentice-system, even if artificial problems are sometimes constructed on the basis of the techniques that ought to be trained, there is instead a tendency to make the work of the apprentice as useful as at all possible, and hence to train mainly on "true" though simple tasks.

School teaching often makes some use of "recreational" problems; these offer the opportunity to create pedagogical variation, and to show that even from serious teaching, pleasure need not be absent – at least not for those who do their proper work well. In Pier Maria Calandri's words:[8]

> I am convinced that the human intellect, proceeding in the same way, however enjoyable it be, will sometimes be disgusted, and in order to avoid this nuisance, as we said in the beginning of our work, this chapter treats of some pleasant cases, which are solved by means of various rules, as will be seen from the examples.

In school, these problems really become "recreational"; but the school is not their authentic territory.

The true abode of these problems which distort everyday situation so as to create peculiar or downright absurd cases, regarding their creation as well as the transmission, is the sub-scientific knowledge system. The sub-scientific systems correspond, indeed, to a culture of oral type, whereas the school always depends on the culture of writing.[9] The "recreational" problems are *riddles for specialists*, and share with other riddles that eristic quality which characterizes oral culture in general.[10] Often when found in problem collections or manuals for practitioners (literate genres that are still close to the oral culture) they are introduced by phrases like "If you are an accomplished calculator, tell me ...", or they are presented as artifices that will confound the guileless non-specialists. In the pre-Modern world, sub-scientific knowledge was indeed no "folk knowledge", it was a monopoly of the few – maybe to an even greater extent than science-based knowledge is today.

The introductory phrases show us the true function of the "recreational" problems, which was not properly recreational; at least no more than the potentially lethal Riddle of the Sphinx. They serve to demonstrate *virtuosity*; that is, they serve in the first place to show that the profession as such consists of expert specialists, in the second place to allow the single members of the category to show themselves, and understand themselves as, accomplished calculators / surveyors / architects / ... .

This function determines the character of the problems. They should provoke immediate fascination, which explains the "recreational appearance": if a camel transports a quantity of grain from one place to another, if it may carry one third of it at a time, and if it seems to devour exactly *everything* during the transport,[11] then the "expert" solution (which allows

[8] Ed. [Arrighi 1974: 105].

[9] It should be remembered that sectors of oral and sectors of literate culture coexist for long in traditional societies after the introduction of writing – see, for instance, [Ong 1982: 93*ff*].

[10] [Ong 1982: 43*ff* and *passim*]; cf. [Koch 1995].

[11] "A paterfamilias had a distance from one house of his to another of 30 leagues, and a camel

a net transfer) may astound; if the numbers were less absurd, the reaction to a merely quantitative improvement (say, a transfer of 15 measures instead of 10) might be a simple "so what?". Moreover, the problems should refer to the practice of the profession – singing even as a virtuoso does not enhance the prestige of a calculator, at most it permits friendly-venomous characterizations as "the best singer among calculators, and the best calculator among singers" That is why the *form* of the problems should be practical. On the other hand, the problems have to be more intricate than those which any stupid representative of the category will be able to solve without hesitation; this, together with the hunt for the fascinating or the absurd, explains that *the substance* of the problems is pure or, better, "supra-utilitarian", that is, that they remain distinct from genuine practice – more distinct indeed than the simplified problems engendered by school teaching.

Further: no less than school problems, the professional riddles – the so-called "recreational problems" – are determined by the methods, that is, by the distinctive techniques belonging to the profession, the competence that is acquired during training and during work. Often, as is the case with other riddles, the professional riddles also depend on a particular trick – in the case of the camel, on the interruption of the travel in an intermediate point. Such tricks will be known within the profession and not among the non-initiate, and even they will thus be part of the arsenal of techniques belonging to the profession *as a social unit*.

Frequently, tricks of this kind are not generalizable, and they serve only for a particular type of riddle. Moreover (as Abū Kāmil and other mathematicians from the Islamic Middle Ages explain), the practitioners that employed them would not always know why they worked. Before analyzing the problem of the "hundred fowl",[12] Abū Kāmil explains that this is

> a particular type of calculation, circulating among high-ranking and lowly people, among scholars and among the uneducated, at which they rejoice, and which they find new and beautiful; one asks the other, and he is then given an approximate and only assumed answer, they known neither principle nor rule in the matter.[13]

For Abū Kāmil, as for a modern mathematician, a similar attitude is unacceptable, perhaps even outrageous. However, for the members of the sub-scientific environment it constituted a normal and fully legitimate use of knowledge. The purpose of inventing and solving these "supra-utilitarian" problems was not the growth of knowledge but to demonstrate virtuosity,

---

which was to carry from one of the houses to the other 90 measures of grain in three turns. For each league, the camel would always eat 1 measure. Tell me, whoever is worth anything, how many measures were left" (*Propositiones ad acuendos iuvenes*, 52 version II, ed. [Folkerts 1978: 74]. The solution tells that the camel at first makes only 20 leagues with the first 30 measures, leaves the 10 measures that remain as a deposit, returns in order to carry another 30 measures, etc.; after three turns, 30 measures will be deposited 10 leagues from the second house, which permits a net transfer of 20 measures. It is easily seen that it is possible to transfer 25 measures if a first deposit is made after 10 and a second after another 15 leagues.

[12] "Somebody wants to spend 40 pence on 40 fowls, of three kinds, namely thrushes, larks and sparrows. The thrush costs 3 pence, the lark 2 pence, and sparrows are 4 a pence" (anonymous fourteenth-century *Libro d'abaco*, ed. [Arrighi 1973: 34]); a variant with "100 £ for 100 heads of cattle" follows.

[13] German trans. [Suter 1910: 100].

to show off. The supra-utilitarian level of the complex of sub-scientific knowledge is thus neither directly nor indirectly a support for professional practice, nor a contemplation of the principles that govern and justify this practice. This makes it totally different in character both from that pure or "theoretical" knowledge which Aristotle and al-Fārābī spoke about, and from our "pure science" which – thus at least we say in order to defend its social utility – is ultimately meant to be applied after adequate transformation.

A consequence of the particular orientation of the supra-utilitarian level of sub-scientific knowledge is thus the absence of that characteristic dynamics of theoretical or "scientific" knowledge according to which open problems are in principle what calls forth the invention of new methods, techniques and ruses – methods etc. which on their part will engender new open problems, or maybe even raise doubts about the validity of old solutions. As long as it stays in its original milieu, sub-scientific knowledge may therefore remain unchanged for centuries or, as we shall see, for millennia. It is not the existence of knowledge in itself, not even of knowledge that is not linked directly to practical use, which spurs dynamics; it is knowledge tied to a certain attitude concerning its use and purpose and conditioned by a social milieu which imposes this attitude.

In this perspective, and judged in relation to a specific system of epistemological values (ours, to be certain, it possesses no automatic cross-cultural validity), the term *sub*-scientific may be justified in the sense that the knowledge which it characterizes is similar to the full complex of technical and scientific knowledge of our epoch, while the attitude regarding its use (including its social use) with which the environment looks at it prevents it from developing *as knowledge*.[14]

But the topographical metaphor is two-edged, and is also meaningful in another way. Indeed, all levels of the sub-scientific knowledge system, the supra-utilitarian no less than the practically applicable, have often served as inspiration for mathematical cultures of scientific type – not only as the ground from which they first took off, but also in their mature phases. In this sense, the sub-scientific system has remained a substratum for the scientific system – in most cases an anonymous and unacknowledged substratum.

The use of material of sub-scientific origin may be observed in the Greco-Islamic area as well as India and China.[15] Japanese *wasan* may even represent the transmutation of a sub-

[14] This is the perspective in which we should see the partially or completely false rules by which Piero della Francesca solves equations of the third, fourth, fifth and sixth degree. It also allows us to understand the conflict between Tartaglia and Cardano not just a clash between brusque characters but as an expression of a historical turning point: the use the former intended to make of his trick belonged within the eristic ambience of the sub-scientific system; the right and obligation to publish important results (giving all due credit) was an ingredient of the value system of science, to which Cardano subscribed.

[15] Thus, the subtle algebra of Zhu Shijie (the *Jade Mirror* from 1303) has evident similarities with the surveyors' tradition of which we shall speak below, precisely in aspects that have no apparent roots in the Chinese tradition – see [Martzloff 1988: 149–152]. It seems likely that the erudite mathematician had borrowed inspiration from this sub-scientific tradition, perhaps diffused through networks that had been established within the Mongol empire.

scientific into a proto-scientific system, under the influence of imports from China and in the context of a corresponding transformation of the social system by which mathematical knowledge was carried.[16]

In the region that encompasses ancient Greece, medieval Islam and pre-Modern Europe (the "Western world", if this term is to be historically meaningful and not just to express the ideology of current discourse), a similar transmutation was excluded. Here, as described by Aristotle, the theoretical system was always socially segregated in a way which in other cultures was the reserve of different kinds of intellectual activity: courtly music in Japan, mandarin poetry closely dependent on the writing system in China – both activities being completely segregated from popular, non-courtly and non-mandarin song.

In "the West" (which, we remember, goes from the Atlantic to the Indus), the particular prestige and social segregation of philosophical and scientific knowledge have had as their consequence that the distinction between sub-scientific and scientific knowledge is more conspicuous than elsewhere; or, rather, that the existence of sub-scientific knowledge as a system *per se* is totally ignored, and its results understood only as more or less degenerate borrowings from "true" knowledge. This is another version of the theory of the Romanticist folklorists, according to which folk tales etc. are *Gesunkenes Kulturgut*, the remains of bygone literatures and great mythologies; that the true representatives of the nation are thus the bards and the prophets of the past, and the common people – the weary peasants and the uneducated wet-nurses with their tales – is nothing but an ignominious filth from which the products of the "true people" had to be extracted.[17]

Even in the absence of this disdain would it have been difficult to know much about the mathematical practice of the pre-Modern epochs. As a rule, its workings would not be committed to writing. Those manuals that *were* written would only be copied under special circumstances;[18] even rarer was the copying of calculations made on ostraca or bits of paper.[19]

In addition, *when* by accident something has survived, it is often interpreted from a misleading perspective. An example of this is what Michael Mahoney writes about "Hero's"

[16] See [Horiuchi 1994: 23–31].

[17] At least in its general tenor, van der Waerden's hypothesis concerning the origins of mathematics [1983] corresponds to the thinking of the Romanticists. Apart from this difference (and those to which it give rise), his thesis that the scribal cultures exploit older anonymous sources of inspiration have a certain similarity with the ideas that are proposed here. However, the Romanticist view has one important consequence: in agreement with the prestige of every sacred caste, van der Waerden's pre-scribal mathematics is genuine mathematics, based on at least proto-theoretical insights – that is, a mathematics that was bound to be corrupted when adopted by scribes, philistines deprived of creativity in the eyes of a romantic.

[18] The few cases in which this happened often regard cultures with scientific pretensions but bereaved of the competence that was needed for penetrating scientific texts – Byzantium, Latin Europe after the Carolingian reform.

[19] From the construction of the Cathedral of Milan one single computation survives – analyzed by Guy Beaujouan [1963]; from countless other architectural works of comparable complexity nothing at all.

Geometrica in *Dictionary of Scientific Biography*. It is told to be "essentially book I of the *Metrica*.[20] In fact, however, "the *Geometrica*" was put together by Heiberg in the critical edition from two distinct conglomerates (mss A+C and mss S+V, respectively); A+C contains a short Heronian contamination, but for the rest A+C as well as S+V are similar to the Heronian treatise only because even Hero draws upon the sub-scientific traditions that go into the two *Geometrica*.[21]

If it is thus difficult to discern what went on in mathematical practice, then it is even harder to follow and separate the traditions through which it was transmitted. Mostly, formulae and geometric constructions are too simple to allow us to distinguish between independent invention and transmission – it remains a reckless claim that the Egyptians must have learned from the Sumerians to draw human figures with exactly 10 fingers.

None the less, it *is* possible to trace in the mathematics of the *abbaco* school elements that have been taken over from more or less identifiable and localizable sub-scientific traditions, notwithstanding the passage through the written Arabic tradition and interactions even with the mathematics of the Latin school (which is a genuine example of *gesunkenes Kulturgut* and which, regarded as mathematics, often seems less interesting than the *abbaco* variety, but which certainly belongs to the "theoretical" or "scientific" type).[22]

A first example will be the "ascending continued fractions", expressions of the type "a third, and two fifths of a third",

$$\frac{1+\frac{2}{5}}{3}\ .$$

It is well known that these fractions are described in chapter 4 of the *Liber abbaci*, and that Leonardo introduces a notation for them that was in use in the arithmetic of the Maghreb *madrasah*.[23]

In the *abbaco* school tradition, these fractions survived until Clavius could describe them;[24] Jordanus of Nemore sees that they constitute a generalization of the place value notation and tries to naturalize them in Latin mathematics and to root them in the Latin scholarly tradition,[25] but no other writer appears to have ever adopted his notion of "dissimilar fractions" (which in fact remains so singular that Eneström misunderstood the text he was publishing.[26]

[20] [Mahoney 1972: 315].

[21] See [Høyrup 1996b].

[22] This observation underscores that the dichotomy "scientific" / "sub-scientific" is descriptive and implies no value judgment, nor by necessity any appraisal of mathematical level.

[23] Ed. [Boncompagni 1857: 24]; cf. al-Qalaṣādī, *Kašf al-asrār ᶜan ᶜilm ḥurūf al-ġubār*, ed. [Souissi 1988: 49].

[24] See [Vogel 1982].

[25] See [Høyrup 1988: 337*f*].

[26] [Enestrøm 1913: 44].

Usually, these fractions are supposed to be represent a particular Arabic idiom. They are also found in a number of Babylonian texts, however, from the second as well as the first millennium BCE, used where metrological subdivisions are insufficient. I do not know Syriac sources where they appear, but they turn up in certain Greek texts of clear Syriac inspiration; thus, in various points of the *Geometrica* (but never in Hero's *Metrica*) and, parodically, in those of the arithmetical epigrams of the *Greek Anthology* that refer to techniques borrowed from the Near Orient.[27]

A single example is found in a mathematical text from Pharaonic Egypt, namely in problem 37 of the Rhind Mathematical Papyrus:[28]

> I go 3 times into the *hekat*; a third of me is added to me, a third of a third of me is added to me, and a ninth of me is added to me. I return fully satisfied [that is, the *hekat* measure is full]. What is it that says this?

A problem which is too similar to be fully independent turns up in a Babylonian tablet from c. 1800 BCE, belonging to a group of texts close to the non-scholastic tradition:[29]

> If [somebody] asks (you) thus: To $^2/_3$ of my $^2/_3$ I have joined 100 silà [1 silà ≈ 1 l] and my $^2/_3$, 1 gur [= 300 sìla] was completed.

The Egyptian problem is solved correctly and in agreement with the usual ways of the Rhind Papyrus. The Babylonian solution, on the other hand, is no solution at all but a manipulation of numbers that presupposes the solution – a *Schimpfrechnung*, as the German cossists from the sixteenth century would call it. The problem has no doubt travelled with some kind of practitioners, carriers of a body of sub-scientific knowledge in which entered the use of ascending continued fractions. In Egypt, as it often happened when material of sub-scientific origin was taken over by the school or by science, only the problem was borrowed, whereas the technique for solving it was thought unsatisfactory (in the present case it really was from any mathematical point of view) and discarded. In slightly later Babylonian texts (in which, however, even the ascending continued fractions have been eliminated), a similar normalization can be observed.

Processes of this kind show that the cultural relations were not between the "high" cultures of pre-Modern school or science; the connections were between communities of practitioners, from which the high cultures took over what they found interesting – communities whose geographical boundaries did not coincide with those of the high cultures.

In the actual case, it seems to have been a community of Semitic-speaking merchants that, already in the first centuries of the second millennium BCE and still in the Middle Ages, made use of the language of ascending continued fractions. Groups that came in contact with these

---

[27] See [Høyrup 1990c: 298*f*] for the *Anthologia graeca*.

[28] Trans. [Peet 1923: 74].

[29] [Baqir 1951: 37], interpretation [von Soden 1952: 52]. In order to recognize the similarity between the Egyptian and the Babylonian problem one should keep in mind that $^2/_3$ was considered a "simple fraction" on a par with $^1/_3$.

As regards the proximity of certain Babylonian texts to the non-school tradition, see [Høyrup 1996a].

merchants borrowed the language, but always with reluctance when their own language did not belong to the Semitic family; this can be observed in Egypt, in India, in late Ancient Greece, and also late medieval Latin and Italian Europe.

In order to show that not everything was adopted everywhere I shall point to a procedure which I have looked for in vain in a number of *abbaco* treatises – namely a particular way to express the length of the circumference of the circle. In Babylonian texts, in problems where this length is found from the diameter (texts that are always fairly close to the non-school tradition), the circumference is never expressed as "3 times the diameter", with the multiplication that is used by the same texts when the area is found as 5 (i.e, $^{5}/_{60}$) times the squared circumference. Instead, the diameter is "repeated until 3", or it is expressed as "the triple of the diameter" – both operations that have the character of a repetition.

In the *Geometrica*, several formulae are found which link the diameter d to the circumference c: $c = (22\cdot d):7$; $c = (d:7)\cdot 22$; – and finally $c = 3d+{}^{1}/_{7}d$. In this last case, the value of $3d$ is always found separately, and ${}^{1}/_{7}d$ added afterwards; moreover, $3d$ is expressed even here by a repetition and never by means of the multiplication that is used in the other formulae. It seems an inescapable conclusion that the Greek formula is nothing but the Babylonian (or rather, pre-Babylonian) computation provided with an Archimedean correction. That the correction was introduced by anonymous practitioners is said fairly directly by Hero, when he refers to those who assume the circumference to be "the triple of the diameter, and the seventh part more".[30]

In contrast, medieval Arabic treatises multiply directly and without difficulty by $3^{1}/_{7}$, and the old formula (with or without correction) seems to have disappeared. As already told, the same seems to be the case in the *abbaco* treatises. It reappears, however, (with the correction) in Mathes Roriczer's *Geometria deutsch* from c. 1480, explained as a constructive procedure:[31]

> Who wants to make a round stroke straight in such a way that the straight stroke and the round one be equally long, shall make the round one three times, one besides the other, and then divide the last of the three circles in 7 equal parts and adjoin one part.

From *Geometria deutsch*, ed. [Shelby 1977: 121].

The use of a similar concrete procedure is the probably cause that so idiosyncratic and peculiar a formula has survived for 3500 years.

Geometria deutsch is derived from the post-ancient European tradition, that of the builders of cathedrals and monasteries. The fact that a formula that was never forgotten in this culture is absent from the practical geometries of *abbaco* type is an extra argument (other, stronger arguments exist) to understand the *abbaco* school as part of in a pan-Mediterranean phenomenon whose core belonged to the Islamic orbit.

[30] *Metrica* I,31, ed. [Schöne 1903: 74]. Hero, who is well versed in the writings of Archimedes, is thus a witness that the – corrupt – proposition 2 of the *Measurement of the Circle* (where the same phrase is used) is a contamination coming from the practitioners' tradition.

[31] *Geometria deutsch* no. 9, ed. [Shelby 1977: 120].

Other aspects of language and techniques are not sufficiently clear-cut to allow the drawing of similar conclusions regarding origins and connections. We shall therefore turn to the mathematical riddles, the so-called "recreational problems". Two distinct clusters are of interest.

The first includes, among others, "the collective purchase of a horse",[32] "the hundred fowl", and "the doubling of unity" until 30 or 64 times.[33] All, as is known, are found in the Middle Ages everywhere from India to Fez,[34] and the characteristic structure of the purchase of the horse turns up both in the *Nine Chapters on Arithmetic*[35] and in Diophantos's *Arithmetica* I.xxiv–xxv.

It is less known that the first book of Plato's *Republic* seems to contain (333b–c) a reference to the same problem – the "collective" purchase of a horse is a situation where an expert is needed. Since even "Thymarides' flower" (a trick that allows the resolution of problems of a different but similar kind[36]) goes back to Plato's times, there are fair reasons to assume that the purchase of a horse was already a famous problem around the Mediterranean around 400 BCE.

As shown by Jean Christianidis,[37] a Greco-Egyptian papyrus contains a version of the "hundred fowl", though not yet the ripened version (100 units, total price 2500): as if the "amazing" formulation had not yet been found – the 100 monetary units and the 100 fowls. The problem is therefore likely to be a fresh creation of the classical epoch; but since similar "non-amazing" versions return (though rarely) in later times, the inference remains hypothetical. In any case, several versions of the problem in mature shape are found in the *Propositiones ad acuendos iuvenes*[38] (a collection of "recreational problems" from the Carolingian epoch that had probably circulated in Gallia since late Antiquity, possibly put together by Alcuin), and also in the fifth(?)-century Chinese *Zhang Qiujian suanjing*.[39] It is thus almost certain that the problem reached its mature shape already in the first centuries CE.

Much older is the doubling of unity. In a text from c. 1800 BCE from Mari,[40] a city situated

---

[32] "Two men that have money found a horse for sale. The first said to the second: if you would give me $^1/_3$ of you money, then, together with the money that I have, I should have the price of the horse. The second answered and said: if you would give me $^1/_4$ of your money, then, together with the money that I have, I should have the same. I ask you for the price of the horse and for the money each one has" (example drawn from a thirteenth-century Umbrian *Livero de l'abbecho*, ed. [Arrighi 1989: 68]).

[33] "To double a grain of wheat as many times as there are white and black squares in the chessboard: which are 64 in total" [Pacioli 1523: 43^r].

[34] See, for instance, [Tropfke / Vogel 1980].

[35] VIII.10,12,13, ed. [Vogel 1968: 86*f*]. Even though other chapters of the Chinese treatise go back to the pre-Christian era, chapter VIII is from the first century CE [Martzloff 1988: 118*ff*].

[36] See [Heath 1921: I, 94]. It is even possible to transform the horse problem in such a way that it can be solved by means of Thymarides's flower.

[37] [Christianidis 1994: 240], cf. the text in [Winter (ed.) 1936: 39].

[38] Ed. [Folkerts 1978].

[39] See [Martzloff 1988: 293*f*].

[40] Ed. [Soubeyran 1984: 30].

to the north of Babylonia proper, it deals with grain, and the formulation is additive ("to each grain, a grain"); the process continues until 30 doublings,[41] and the larger quantities are expressed in metrological units and not in number of grains. Treating of silver instead of grain, but with 30 doublings and making use of metrological units, the problem recurs in a Greco-Egyptian papyrus.[42] In the *Propositiones* we find the additive formulation, still with 30 doublings but without metrological units (by necessity, since men are concerned). In the same decades al-Khwārizmī writes a treatise, now lost, on the chessboard problem with its 64 doublings; 30 as well as 64 doublings are from then on found everywhere throughout the Middle Ages.

This problem cluster appears to have belonged in Antiquity and the Middle Ages to the community of merchants travelling along the "Silk Road", and to other groups with ties to this community. As already referred to, Diophantos draws on its problems in book I of the *Arithmetica*. But the same community may have also left a very important *technique*, to him as well as to Arabic mathematics: the algebra of the *arithmós* / *šay'* / *res*, used to solve problems of the first degree. That this algebra "of the thing" was seen in the world of calculators (at least Arabic calculators) as distinct from "*al-jabr* algebra" is demonstrated by the *Liber abbaci*, where it is introduced in the discussion of the problem "give and take" under the name *regula recta*, told to be excellent and in use among the Arabs.[43] However, what Leonardo does coincides exactly with Diophantos's way to solve the same problem in *Arithmetica* I.xv. We may thus take it for granted that Leonardo and his sources were right in considering *regula recta* and *al-jabr* as techniques with distinct origins.[44]

The other interesting cluster has a different story and a different origin, but even this one has an oblique relation to algebra. It goes back to the practical geometers (surveyors, perhaps also architects etc.) of non-Sumerian Iraq of the late third millennium BCE; possibly the group ranged more widely, into Iran or elsewhere, but no extant sources inform us. The cluster consists of geometric riddles treating of squares and rectangles.[45] If s refers to the side of a square, Q to its area, d to the diagonal and ${}_4s$ to "the four sides" or "all the sides", two original riddles on a single square are

$$s+Q = 110 \qquad {}_4s+Q = 140 \ .$$

The order of the members indicates that the sides are spoken of before the area, in agreement with a principle that holds for riddles in general (mathematical and, when relevant, non-

[41] It might be of interest that a "chessboard" with 30 squares existed at the epoch.

[42] P. Ifao 88, ed. [Boyaval 1971].

[43] Ed. [Boncompagni 1857: 203]. Later in the work, and still before the presentation of *al-jabr* algebra, the term recurs often; it always refers to a rhetorical algebra of the first degree with a single variable (the *res* or "thing", Arabic *šay'*).

[44] This observation certainly does not exclude that the two techniques had been merged long before the *Liber abbaci* was written. They are already fused in al-Khwārizmī's treatise.

[45] The (fairly recent) discovery of this tradition, whose traces run from 2000 BCE until Pedro Nuñez, is described in [Høyrup 1996], and again in [Høyrup 1996a]. Since the argument is complex, I shall refer to these publications for further discussion; in the present context I shall only repeat some of the results.

mathematical); namely, that the entity (in mathematical riddles, the quantity) that is known directly is presented first, derived entities afterwards. Plausible is also the existence of analogous subtractive problems:

$$Q–s = p \qquad Q–{}_4s = q \qquad {}_4s–Q = r$$

and maybe even of the mathematically mistaken problem

$$d–s = 4$$

– mistaken in the sense that it corresponds to the approximate solution d =14, s = 10 – and of the problem[46]

$${}_4s = A\ .$$

For two squares with areas Q_1 and Q_2, the following questions were asked:

$$Q_1+Q_2 = p\ ,\ \ s_1\pm s_2= q$$

and

$$Q_1–Q_2 = p\ ,\ \ s_1\pm s_2= q\ .$$

For rectangles with area A, sides l and w and diagonal d, the following problems seem to have existed:

$$A = p\ ,\ \ l\pm w = q$$

$$A+(l\pm w)= p\ ,\quad l\mp w= q$$

$$A = p\ ,\quad d = Q$$

and maybe

$${}_2l+{}_2w = A\ ,\ \ l–w = p$$

together with alternative versions of some of the preceding problems referring to “all sides”.[47]

Since the sides were conceptualized as “broad lines”, that is, as provided with a virtual breadth 1 (a stratagem that allows to identify their length with areas of the same magnitude[48]), all the problems are geometrically meaningful. For instance, the sum of the four sides and the area can be represented by a configuration which is familiar from the description in al-Khwārizmī’s *Algebra* (see next page):

In order to solve the problem, a square 1×1 is adjoined in each corner. The completed area will then be 144, its side 12; from 12, the two adjoined pieces of 1 are removed, leaving 10.

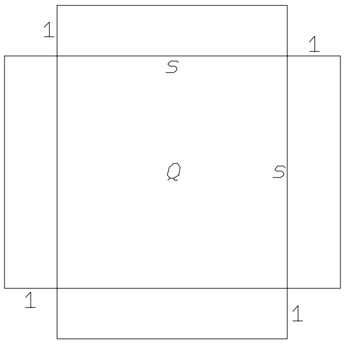
---

[46] This possibility is not discussed in my earlier publications, because I suspected its presence in medieval sources (*Liber mensurationum*, *Pratica geometrie*) of being a late phenomenon. However, it turns out to be discussed in the pseudo-Nichomachean *Theologoumena arithmeticae*, which suggests a common origin, that is, the surveyors’ tradition. For stylistic reasons it seems plausible that this origin coincides with the invention of the other problems that combine the four sides and the area around 2000 BCE.

[47] This possibility is suggested by a confrontation of medieval sources with Plutarch (*De Iside et Osiride* 42), quoted in [van der Waerden 1979: 401].

[48] The notion of “broad lines” and its diffusion in many cultures is dealt with in [Høyrup 1995].

We possess no direct sources for all this; the surveyors' environment was a non-scholasticized and probably oral environment which has left nothing in writing (at least, nothing which survives). The only information we have is indirect, and comes from penetrating comparative analysis of the various scientific and scholasticized traditions that have drawn on the legacy.



The first of these is the Old Babylonian scribe school (c. 1800 to 1600 BCE). This school, the first of Babylonian and not of Sumerian culture, took over the small stock of geometric riddles and transformed it into a genuine mathematical discipline – so-called "Babylonian algebra" – making use of the same cut-and-paste techniques as the surveyors, but introducing also methods for treating non-normalized problems and the idea to represent non-geometric problems geometrically.

At times it is easy to recognize the non-school origin of the school problems, at times not; at times is it obvious that a particular problem is a school invention. A particular clear-cut non-school case is a problem which in the context of the complete tablet looks like a piece of folklore inserted in order to show that the methods taught in the first 22 problems may also serve in the good old riddles, transformed (as always when the riddles were adopted by the school) into "recreational problems":[49]

> About a surface. I have accumulated the four fronts and the surface [of a square, since it is provided with 4 fronts], 41´40˝.
>
> 4, the four fronts, you inscribe. The reciprocal of 4 is 15´.
>
> 15´ to 41´40˝ you raise [i.e., multiply]: 10´25˝ you inscribe.
>
> 1, the projection [the breadth 1 which transforms the side or "front" into a "large line"], you adjoin [actually, it is the completing square contained by two projections that is adjoined]: 1°10´25˝ has 1°5´ as side.
>
> 1, the projection, which you have adjoined, you tear out: 5´ to two
>
> you repeat: 10´ nindan [the basic unit for the measure of horizontal extension, c. 6 m], confronts itself.

Already the introductory phrase "about a surface" is an ellipsis for "If somebody asks you thus about a surface" – a reference to the riddle origin of the problem (and to the original function of the riddle: challenge, not recreation). Also the order of the members is significant: only one other Babylonian problem, even this one very close to the riddles, speaks of the sides

[49] BM 13901 no. 23, ed. [Neugebauer 1935: III, 4*f*]. Neugebauer's translations, here and elsewhere, presuppose a purely arithmetical interpretation of the technique; the same interpretation, now outdated, underlies all other translations of "Babylonian algebra" made before 1990. The translation which is offered here is based on a geometrical interpretation, the necessity of which is discussed, for instance, in [Høyrup 1990]. The numbers, written in the tablet in a place value system with base 60, are transcribed in agreement with Thureau-Dangin's convention which, in the present case, coincides with the familiar notation for degrees, minutes and seconds.

The text does not proceed precisely as described above: instead of completing the four corners of the cross-shape, it takes one quarter of the full configuration, and therefore needs only a single completion.

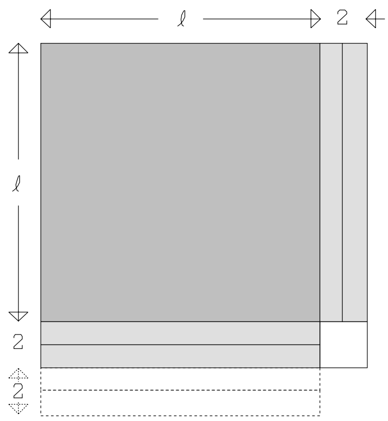
before the area. Worth noticing is, finally, the solution: no other Babylonian problem treating of a single square leads to the side 10 (in any order of magnitude). The favourite values are 30´ and 30; 20´ is a possible alternative but rather rare.

The scribe school institution disappears after 1600; so does that sophisticated algebra which it had produced. But the profession of practical geometers survives, and its traces turn up all over the Near Orient for several millennia – Abū'l-Wafā' refers to it in the 990s CE[50] as a well-defined group which, for problems of riddle type (to transform three squares into a single square) still makes use of the cut-and-paste technique.

Also the quasi-algebraic riddles survive. "Algebraic" interest reappears in Late Babylonian, and certain aspects of the terminology shows that the transmission has occurred through a non-school environment. More interesting for us is it to discover the traces of the quasi-algebraic riddles in Greek culture. Discussion of the relation between the so-called "geometric algebra" of *Elements* II and the quasi-algebraic tradition would lead astray; we shall only observe that the whole sequence *Elements* II.1–10 appears to be a "critique" (in quasi-Kantian sense) of the methods used by the surveyors to solve the quasi-algebraic riddles, analyzing *why and under which conditions* these can be justified.

That both the problems and the traditional methods were known in the Greek world is confirmed in the pseudo-Heronian *Geometrica* (ms. S), in which we find the following problem (the diagram is not in the manuscript, which shows only a square, but it follows the text):

> A square surface having the area together with the perimeter of 896 feet. To get separated the area and the perimeter. I do like this: In general [i.e., independently of the parameter 896 – JH], place outside the 4 units, whose half becomes 2 feet. Putting this on top of itself becomes 4. Putting together just this with the 896 becomes 900, whose squaring side becomes 30 feet. I have taken away underneath the half, 2 feet are left. The remainder becomes 28 feet. So the area is 784 feet, and let the perimeter be 112 feet. Putting together just all this becomes 896 feet. Let the area with the perimeter be that much, 896 feet.[51]



Book I of Diophantos's *Arithmetica*, too, contains problems that seem to come from the quasi-algebraic tradition. As I have discussed in another context,[52] even the concept *dýnamis*, in geometry the square parametrized by the side and not by the area, with Diophantos the name of the "power" (in modern terminology, second power) of the unknown number, may be a borrowing (and the name a loan-translation) from the Near Eastern tradition.

[50] *Book on what is needed by the artisan in geometric construction* X.xiii, Russian trans. [Krasnova 1966: 115].

[51] Ed. [Heiberg 1912: 418].

[52] [Høyrup 1990b].

Generally, the sources from the Islamic Middle Ages are influenced by the tradition in two ways. Firstly, al-Khwārizmī has known the riddles and makes use of them when transforming the *al-jabr* technique into a scientific discipline. *Al-jabr*, too, was originally a sub-scientific tradition, maybe with roots in Central Asia (Khwarezm? Turkestan?). We cannot say much about its shape before the transformation effectuated by al-Khwārizmī, only that it was already somehow integrated with *res* algebra. What we do know is that its core was constituted by a group of problems about a quantity of money (*māl*, a "possession") and its square root. Originally these had been riddles, but already in al-Khwārizmī's epoch they were regarded as standardized paradigms for the solution of second-degree number problems.[53] In Al-Khwārizmī's example of the first mixed case (which would be repeated in Italian and Latin algebra until the sixteenth century) the sum of the possession and 10 of its square roots is equal to 39 dirhem; in the tradition as known by al-Khwārizmī this was solved by means of an algorithm without proof nor argument: "halve the roots [5], multiply the half with itself [25], adjoin the result to the dirhem [25+39 = 64], take its root [8], remove the half of the roots [8–5 = 3], this will be the root of the possession, and the possession itself will be the product of the root with itself [9]".

When asked by the Caliph al-Ma'mūn to write an introduction to this technique, al-Khwārizmī did more: he transformed the subject into scientific mathematics, equipping it with proofs. For this purpose he did not use the theorems of *Elements* II (as Thābit ibn Qurrah and Abū Kāmil were to do); instead he went to the original source, that is, to the riddle technique of the surveyors. His first proof is indeed taken from the solution of the problem of the four sides and the area as shown above.

In the long run, al-Khwārizmī's treatise eclipsed what had existed before, and the geometric proofs ended up by being considered the very gist of the discipline. When it was adopted by Leonardo, he even presented *māl* / *census* (the possession) as another word for the geometric square – that is, for the square which in the demonstrations *represented* the *māl*, once a quantity of money, then any numerical quantity. The root – for al-Khwārizmī still a number, the square root of the *māl* – was presented by Leonardo as a broad line.[54]

La prima dimostrazione geometrica di al-Khwārizmī, a cura di [Mušarrafah & Aḥmad 1939: 22].

[53] The problems speak first of the possession, then of the root. This ordering reflects their origin as riddles: first the directly known quantity is mentioned, afterwards what is derived from it (its square root). After the interpretation of the root of the possession as "root of the equation" and of the possession as the second power of the root, the order, while unchanged, becomes the one with which we are familiar: first the second, then the first power.

[54] *Pratica geometrie* III.ii, ed [Boncompagni 1862: 56f]. In the *Liber abbaci*, Leonardo instead identifies the *census* with a square but – this at least seems to be his intention – with a *square number*, since *geometric* squares are spoken of as *quadrilateri* [ed. Boncompagni 1857: 406, 408].

But the old geometric tradition had even more direct influence in the Islamic world. One source where this can be seen is the *Liber mensurationum*[55] of a certain Abū Bakr, a work which we possess only in Gherardo da Cremona's Latin translation, but which may go back to the early ninth century. There we find almost all the old problems, including "the four sides and the area", with the sides mentioned first and with side 10. But even Savasorda's *Collection* (or *Liber embadorum*) contains many of them; among the few Arabic works on practical calculation that have been published, one at least (ibn Thabāt's *Reckoner's Wealth* from the early thirteenth century) also includes some. It is thus fairly probable that the old riddles were widely diffused.

They appear to have entered the Italian world through Leonardo Fibonacci's *Pratica geometrie* from 1220. It is easily shown that Leonardo made use of Gherardo's translation of the *Liber mensurationum*, and probably of the *Liber embadorum*. It is also next to certain that he has received direct inspiration from the Islamic world in this as in other domains; alternatively, he will have had to rediscover old geometric techniques that are not explained in the two recognizable sources.

In the *Pratica geometrie*, the problem of the four sides and the area serves as the general paradigm for the first mixed case of *al-jabr* – "possession plus roots equal number".[56] Whether for this reason, or because of a general intent to standardize and because he sees no reason to distinguish between quasi- and *al-jabr* algebra: in any case Leonardo changes the order of members and speaks of "the [quadratic] surface and its four sides".[57]

Even Piero della Francesca chooses "the four sides and the area" more or less as a paradigm in his *Trattato d'abaco*;[58] for this he may of course have been inspired by Leonardo, but the way he expresses himself – he "joins" the area to the four sides (which we must hence suppose to be already present), whereas all the others make use of a symmetric operation – suggests a less roundabout inspiration from the Arabic world. It would deserve a deeper analysis than what has been made so far that Piero presents the other quasi-algebraic problems together at a much later point in the treatise, namely in the geometry part.

Luca Pacioli deals with algebra in the second-last chapter of the first part of the *Summa de arithmetica*. There he follows the orthodoxy that went back to al-Khwārizmī – for example, the paradigm for the first mixed case is shared with al-Khwārizmī and with the *Liber abbaci*.[59] Then, in the second, geometrical part he states[60] that

> Although we said rather much in the arithmetical part on the rule of algebra: none the less it is needed to say something more on it here.

What follows is drawn from Leonardo's *Pratica de geometria*, and might hence seem not to be

---

[55] Ed. [Busard 1968].

[56] In the *Liber abbaci*, instead, the description is more orthodox, that is, closer to the style of al-Khwārizmī and Abū Kāmil.

[57] Ed. [Boncompagni 1862: 59].

[58] Ed. [Arrighi 1970: 122].

[59] Dist. 8, tratt. 5 [Pacioli 1523: I, 145^{v}].

[60] Dist. 3, cap. 1, [Pacioli 1523: II, 15^{r}].

very informative for the present discussion. It is, however, interesting: Pacioli (or rather the treatise on geometry which he follows[61]) returns to the original order of members; moreover, in another place he corrects a passage which was corrupt already in Gherardo's translation of the *Liber mensurationum*, and which Leonardo had not been able to repair even though he demonstrates to be aware that something is wrong. However, Pacioli's correction is only partial, and thus not due to understanding of the error but to use of a better original than the one to which Gherardo had had access, and certainly different from Piero's source.

Latino-Italian Europe thus knew the quasi-algebraic riddles not only through Abū Bakr / Gherardo and Savasorda but also through so far unidentified channels – channels that are mirrored at least in Piero's work, in the *Summa de arithmetica* and, in all probability, in Leonardo's *Pratica*. Obviously we still have much to learn on the links between the Italian tradition and that of the Islamic Mediterranean, just as we have much to learn about the sub-scientific traditions within the Islamic world itself – traditions in which historians of mathematics have rarely found it really worthwhile to invest their interest.

[61] Pacioli indeed makes use of an anonymous manuscript (Biblioteca nazionale di Firenze, cod. Palatino 577) derived from the *Pratica geometrie*, see [Picutti 1989: 76], though with certain corrections. Only consultation of the manuscript can decide whether Pacioli or the anonymous intermediary corrects Leonardo.