
ANNO 1550 ADAM RIES SEINS ALTERS IM LVIII
A R

Rainer Gebhardt (Hrsg.)

Rechenkunst und Mathematik in der frühen Neuzeit

Tagungsband
zum wissenschaftlichen Kolloquium

„Rechenkunst und Mathematik
in der frühen Neuzeit“

vom 21.–23. April 2023
in der Berg- und Adam-Ries-Stadt Annaberg-Buchholz

Veranstalter:
- Adam-Ries-Bund e. V.
- Stadtverwaltung Annaberg-Buchholz
- Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Rechenmeister-Algebra in der Perspektive der Abbaco-Tradition und der neuen Algebra des siebzehnten Jahrhunderts: Was ist Erbe, was ist Transformation, was ist neu? Was war die Wirkung?*

Jens Høyrup

> Die Frage kann überhaupt aufgeworfen werden, inwiefern die Aufstellung allgemeiner Ansichten mit der Gründlichkeit der Forschung, die einer solchen allein Sicherheit und Eigenthümlichkeit verleihen kann, vereinbar ist. Denn die historische Forschung richtet sich ihrer Natur nach auf das einzelne. Aber man wird zugestehen, daß sie ihren Zweck verfehlt, wenn sie darin befangen bleibt.
>
> Leopold von Ranke, *Zwölf Bücher Preußischer Geschichte*, Vorrede

Hans und Gerlinde Wußing in memoriam

Bekanntlich ist die deutsche Algebra, die sich im 16. Jahrhundert als Coß stabilisierte,[1] hauptsächlich von der italienischen *abbaco*-Algebra inspiriert. Hauptsächlich, nicht nur. Die drei überlieferten Kopien von Robert von Chesters Übersetzung von al-Khwārizmīs *Algebra* sind sämtlich im süddeutschen Raum im fünfzehnten Jahrhundert geschrieben, und auch die Übersetzung des Gerhard von Cremona hat einen gewissen (obwohl begrenzten) Einfluss gehabt.

Die italienische Inspiration schöpft aus mehreren Quellen. Der am häufigsten gebrauchte Name *coß* für die Unbekannte kommt von der nord-italienischen Schreibweise *cossa*, und auch die Bezeichnung *zensus* für dessen (zweite) Potenz deutet auf die nördliche Orthographie *zenso* hin – toskanisch bzw. umbrisch schrieb man

---

* Mit herzlichem Dank an den Freunden Renate und Horst-Eckart Gross und Bernhelm Booß-Bavnbek, die unter Zeitdruck sprachliche Nothilfe geleistet haben. Schon unter diesen Bedingungen sollte es dem intelligenten Leser klar sein, wer für klumpige Passagen und andere Mängel verantwortlich ist.

[1] Um den Namen *der Disziplin* von Christoff Rudolffs *Buch* zu unterscheiden, werde ich für den Namen die übliche Schreibweise der Zeit benutzen – also Coss. Für das Buch werde ich dessen Titelseite folgen, wo *Coss* steht. Wo *die Unbekannte* gemeint ist, werde ich (nochmals als zur Zeit üblich) coss schreiben.

cosa und *censo*, und diese Formen werden auch gelegentlich in frühen Schriften aus dem deutschen Raum benutzt.[2]

Die Unterscheidung Nord-/Mittelitalien erschöpft jedoch die Frage nach den Quellen nicht. Zusammen gelesen zeigen uns die verschiedenen algebraischen Teile der Manuskripte München Clm 14908 und Dresden C 80 ein recht buntes Bild.[3] Offenbar hatten eine Anzahl lateinisch und mathematisch gebildeter Gelehrter die Existenz der Algebra entdeckt und versuchten dann, so viel wie möglich darüber zu lernen. Dazu benutzten sie was nun immer ihnen zugänglich war – und das war insgesamt weder systematisch noch kohärent. Kein Wunder, dass die ersten Ergebnisse eklektisch waren.[4]

Schon die „Lateinische Algebra" in C 80 [ed. Wappler 1887] benutzt jedoch eine systematische algebraische Notation (was sich früher an Notationen findet, ist ein Spiegelbild der ganzen eklektischen Situation). Die wird auch in „formalen Brüchen" wie $\frac{50-5r}{1r}$ benutzt,[5] also als eine zwar rudimentäre aber doch wirkliche Symbolik, womit direkt operiert wird, nicht durch den rhetorischen Text vermittelt. Das wurde seit langem in Italien gemacht, meistens aber ohne *systematische* Verwendung der Notation.

Wie schon von Vogel [1981: 9] bemerkt, ist die „Lateinische Algebra [...] kein einheitliches Werk". Sie zerfällt in drei Teile, wovon jede eine Liste mit algebraischen „Fällen" (Gleichungstypen) enthält. Diese Listen zeigen (wie vom Manuskript Wien, Österreichische Nationalbibliothek Pal. 5277 [ed. Kaunzner 1972: 156]) bestätigt, dass es eine Standard-Erwartung gab, nach der die Algebra eine Reihe von 24 Fällen enthalten sollte (alle reduzierbar auf den ersten oder zweiten Grad, oder durch Radizieren lösbar).

Außer den 22 reduzierbaren Fällen, die seit langem (oft als eine geschlossene Gruppe) in Italien behandelt wurden, enthält die Reihe die Fälle $\alpha z = \surd(\beta r)$ und $\alpha z = \surd(\beta z)$.[6] Auch in Italien wurden gelegentlich Fälle mit Wurzeln betrachtet, aber die zwei hiesigen scheinen ihrer Art und Kontext nach lokale Erfindungen zu sein. Sie wären dann die ersten Zeugnisse von unabhängiger Arbeit mit Algebra im deutschen Sprachgebiet. Das wird durch die Beispiele bestätigt, die die Regeln für den dritten und vierten Grad illustrieren. Für den Fall $\alpha z = \surd(\beta r)$ wird einfach die

[2] Z. B. in München, Clm 14908, Fol. 136ᵛ–146ᵛ – nicht von Friedrich Amann geschrieben, aber (da dieser auf dem vorgehenden leeren Fol. 136ʳ eine vergessene Passage einfügt) das Ergebnis einer Zusammenarbeit, woran Amann teilgenommen hat. Fol. 133ᵛ–134ᵛ, von Amann geschrieben, baut auf al-Khwārizmī wie von Gerhard oder (ziemlich unwahrscheinlich) von Guglielmus de Lunis übersetzt: hier schreibt Amann Anfangs *census*, später abwechselnd die Verdeutschungen *zins* (eine sinnvolle Volks-Etymologie?) und *zensus*.

[3] Allein in der sogenannten "Deutschen Algebra" in C 80 wird der Zahl-Terminus auf etwa fünf verschiedenen Weisen angegeben, die erste Potenz auch in fünf, die zweite bis vierte auf zwei bis vier verschiedene Arten, wie aus dem Schema in [Vogel 1981: 11] hervorgeht.

[4] Da dies nicht mein augenblickliches Thema ist, muss ein Hinweis auf die Ausgaben, Beschreibungen und Analysen in [Vogel 1981], [Curtze 1895] und [Wappler 1887] genügen.

[5] *r* steht hier und im Folgenden für , das Symbol für *radix*. Im Folgenden werde ich weiter *z* für (*zensus*) und *c* für (*cubus*) schreiben.

[6] α und β stehen für implizite unbestimmte Koeffizienten.

Gleichung $1z = \surd(8r)$ benutzt; für alle anderen werden Fragen über das Volumen, die Seitenflächen und die Seiten eines Kubus gestellt. Das ist vom mathematischen Gesichtspunkt vielleicht nicht gerade spektakulär – aber es ist neu (jedenfalls habe ich im italienischen Material nie derartiges gesehen), und also nochmals eine Spur anfänglicher unabhängiger Arbeit auf dem algebraischen Gebiet.[7]

Wir können vermuten, dass die Algebra-Vorlesungen des Johannes Widmann von 1486 weniger eklektisch waren als das gemischte Material, das er besaß (worunter C 80); wir können es aber nicht wissen, und seine kritiklose Übernahme einer lateinischen Geometrie in der *Behende und hubsche Rechenung* [Kaunzner 1978] mahnt uns zu einer gewissen Vorsicht. Dagegen kennen wir sowohl die lateinische Algebra im Manuskript München, Clm 1696, vermutlich von Andreas Alexander (und dann fast sicherlich vor 1504) geschrieben [Folkerts 1996], als auch die verwandte deutschsprachige „Initius Algebras" [ed. Curtze 1902: 449–607]; sie jedenfalls bieten uns was Neues und den Beginn der künftigen Coß.

Erstens sind ab Fol. 71ʳ die 24 Fälle auf 8 Regeln dadurch reduziert, dass (modern ausgedrückt) alle Fälle $\alpha x^n = \beta x^{n+1}$ unter derselben Regel auftreten, nämlich „teile [den Koeffizienten] des Größeren durch den [Koeffizienten des] Kleineren " (d.h., $\beta:\alpha$), und so weiter.

Ein weiterer Beitrag zur Reifung der Disziplin ist die Erklärung der Arithmetik von algebraische Monomen und Binomen, mit Schemata für dessen Addition, Subtraktion und Multiplikation (und Verwendung von formalen Brüchen für die Division) – ähnlich dem, was seit einem Jahrhundert in Florenz, aber bisher nicht in deutschsprachigen Manuskripten bekannt war. Die *systematische* Vorlegung eines *algorismus fractionum quantitatum additorum atque diminutorum* (fol. 48ʳ) ist dagegen etwas absolut Neues – vermutlich von der lateinisch-mathematische Bildung des Alexanders verursacht.[8]

Endlich muss die große Rolle der Theorie der irrationalen Größen bei Alexander erwähnt werden; das finden wir auch bei den besten Italienern (wie z. B. Benedetto da Firenze, aber nicht nur), aber nicht in früheren deutschsprachigen algebraischen Schriften.

Zum ersten Mal zum Druck kommt in deutschem Lande die Algebra bei Heinrich Schreyber: *Henricus Grammateus oder Schreyber von Erffurdt den sieben freyen Künsten Maister*, wie er sich auf dem Titelblatt vorstellt [Grammateus 1518],[9] also als universitätsgebildeter *Magister artium*, nicht Rechenmeister. Diese Algebra wird zwar innerhalb eines allgemeinen Rechenbuchs behandelt, zu einer Zeit

[7] Auch neu – trivial aber zufälligerweise mit großer Zukunft – ist ein besonderes Symbol für Wurzel. Statt des in Italien weit verwendeten ℞ findet man hier einfach ".". Der Punkt ist nicht immer leicht zu sehen, und auch mit der Feder nicht leicht zu schreiben. Deshalb wird der Punkt weiterhin mit Hin- und Wegstrich gemacht, als – woraus im Druck z. B. in Rudolffs *Coss* [1525: 34ʳ] √, welches das französischsprachliche Gebiet erreichte unter anderem durch [Scheubel 1551:25ᵛ], [Peletier 1554: 11] und [Mennher 1556: Fvᵛ] (für höhere Wurzeln jedoch nicht ganz in unserer Form).

[8] Möglicherweise auch von der lateinischen Erziehung des Aquinas Suevus, dessen Schüler Alexander gewesen sein soll [Vogel 1953a], vgl. auch [Vogel 1953b].

[9] 1518 ist die Datierung des Privilegs. Das Buchhaltungskapitel enthält aber ein *Zornal 1521*, welches die Drucklegung vermutlich auf 1521 (oder spät 1520) festlegt.

jedoch, wo noch nicht kanonisiert worden war, was zu diesem Genre gehört und was nicht. So behandelt Schreyber, außer was später in Rechenbüchern gewöhnlich wird, nicht nur *etliche regeln Cosse* sondern auch boethische Musiktheorie und Buchhaltung.[10]

Die *regeln cosse* werden innerhalb des Kapitels *Regula falsi mit sambt etlichen regeln Cosse* [Fol. f vi^{r}–l iv^{v}] behandelt, wo aber die *regula falsi*, der doppelte falsche Ansatz, sich mit 1½ Seiten von 78 begnügen muss. Kein Zweifel also, dass die Coß Schreybers wirkliche Interesse ist.

Im Großen und Ganzen ist die Algebra des Schreyber recht ähnlich derjenigen von Alexander – jedoch mit einer wichtigen Ausnahme. Statt die cossischen Symbole, die sonst seit Jahrzehnte gewöhnlich waren, benutzt Schreyber *N:*, *pri:*, *se:* für *numerus, coss* und *Zensus* – und wenn es zu höheren Potenzen kommt, *N*, *1a* (für *prima*), *2a*, ... *8a*.

Rudolff kehrt in der *Coss* [1525] zur Standardnotation zurück; meines Wissens hat keiner innerhalb der Rechenmeistertradition Schreybers Idee weitergeführt.[11] Wir sehen da einen signifikanten Unterschied zur italienischen Situation, wo Luca Pacioli [1494: 67^{v}] zu seiner Erklärung von mehreren Notationen für die Potenzen bemerkt, dass *tante terre, tante usanze*, „so viele Gegenden, so viele Bräuche", und *tot capita: tot sensus*, „so viele Köpfe, so viele Meinungen".[12]

Diese Einheit der Notation in der deutschen Coß ist ein Ausdruck der weiteren Formierung einer Disziplin, wo Rudolffs Buch das Paradigma im ursprünglichen Sinn des Thomas Kuhns ist: Das Buch, das alle gelesen, und aus dem sie alle gelernt haben. Nach 1550 wurde das ein Problem, da „dis Buch der Coss Christoffs Rudolffs nyendert mehr furhanden sey, so [die jungen Gesellen] doch das selbiggern wolten bezalen dreyfach, oder auch vierfach", als Michael Stifel [1553: A 2^{v}] erklärt als Grund, dass er jetzt das seltene aber notwendige Buch neu (und mit Erklärungen und Beispielen stark ergänzt) herausgibt.

Von diesen Ergänzungen abgesehen war die cossische Tradition sehr stabil bis zur *Algebra* des Clavius [1608]. Nur zwei Innovationsversuche sind der Diskussion wert. Zu einem (die Handhabung mehrerer Unbekannten) kehren wir später zurück. Die andere (am Margin der Coß, darf man sagen), Probleme höheren Grades mit *regula falsi* statt mit der Coß zu lösen – vgl. [Smeur 1978].

Bekanntlich hilft der falsche Ansatz (einfach sowohl als doppelt) nur bei der Lösung linearer Probleme. Das drückt Rudolff [1525: Hvi^{v}] so aus, „das sich die falsi allein streckt auff die erst Coss". Da macht Gemma Frisius [1540: XXIII^{v}] sich klug und zeigt, dass sich Rudolff *mit dieser Formulierung* (in der Sache aber nicht) irrt. Modern gesprochen können Probleme $\alpha x^2 = \beta$ und $\alpha x^3 = \beta$ durch die Falsi gelöst werden, wenn sie als Fragen nach x^2 oder x^3 verstanden werden. Nur muss man dann die zwei Ansätze, die für x gemacht werden, in die entsprechenden Ansätze für x^2 bzw. x^3 verwandeln und *diese* dann in den doppelten falschen Ansatz

[10] Musiktheorie habe ich in keinem anderen Rechenbuch aus dem sechszehnten Jahrhundert gefunden und Buchhaltung nur in [Schulz 1600].

[11] Simon Stevin macht etwas ähnliches aber fast sicherlich Unabhängiges in *L'arithmetique* [1585].

[12] Meine Übersetzung, so wie Übersetzungen im Folgenden ohne benannten Übersetzer.

einführen. Solche Aufgaben können jedoch auch, wie Gemma bemerkt, mittels eines einfachen falschen Ansatzes gelöst werden – das haben babylonische und pharaonische Rechner schon in der Bronzezeit gemacht.

Gemmas Erfindung zeigt schon, dass wer sich als klüger aufspielen wollte, es gegen Rudolff tun musste. Seine Erfindung hatte trotzdem nur einen begrenzten Erfolg, abgesehen von den vielen Neuauflagen von Gemmas Buch – es war auf Latein geschrieben, und deshalb überall geeignet, wo Jungen, die bisher Boethius' Arithmetik studiert hätten, ab etwa 1550 die neue Arithmetik in Lateinschulen und Universitäten lernten.

Gemmas Idee wurde zuerst von Simon Jacob aufgenommen – wir wissen nicht genau wann, aber in [1557: 110^{v}] berichtet er, dass er es im zweiten Teil einer (schon veröffentlichten) *Arithmetic* gemacht hat. *Was* er macht, wissen wir von der posthumen Ausgabe seines *New und wolgegründt Rechenbuch* von [1565: 251^{v}] (vermutlich eine Neuausgabe der sonst verlorenen *Arithmetic*). Er sagt zuerst, dass er die Meinung des Rudolff geteilt hat – „bis vor wenigen jaren Gemma Phrisius in seiner Arithmetic einen lustigen weg erdacht", den er jetzt zur Lösung von gemischten Gleichungen zweiten Grades erweitert. Jacobs erstes Beispiel, in moderner Symbolik ausgedrückt, ist

$$x-10 = 4\sqrt{2x}.$$

Das wird zu

$$x^2+100 = 52x$$

reduziert. Gewöhnlich wird das als

$$(x-26)^2 = 476$$

gelöst. Das ist eine Gleichung ersten Grades mit Unbekanntem $(x-26)^2$. Um die mit einem doppelten falschen Ansatz zu lösen, müssen wir also die zwei Positionen a und b für x mit Ansätzen $(a-26)^2$ und $(b-26)^2$ für $(x-26)^2$ ersetzen – aber das können wir nur dann machen, wenn wir mindesten die linke Seite der algebraischen Gleichung schon gefunden haben.

Jacob sagt mit gutem Grund, dass dieser Weg zu vermeiden ist, weil die Coß so viel einfacher und so viel sicherer ist.

Jacobs neue Methode wird von Oswald Ulman and Caspar Thierfelder [1564: b vi^{v}*ff*] übernommen, jedoch ohne dessen Warnung, dass sie eine wertlose Spielerei ist. Die von ihnen gegebene Vorschrift für die Bestimmung der sekundären Ansätze taugt nur für ihre spezifische Illustration der Methode. Man kann sich fragen, wie viel Ulman und Thierfelder kapiert haben; jedenfalls wird ihr Leser nichts verstehen können.

Schließlich diskutiert Johann Weber [1583: 161^{v}*f*] die Methode. Der „kunstreiche Christoph Rudolph" wird hier geehrt als Webers *praeceptor*, und auch Stifel und Jacob werden gelobt – Gemma, Ulman und Thierfelder nur erwähnt. Weber verspricht, die Methode besser als die Vorläufer zu erklären, findet sie aber viel weniger wertvoll als die Coß. Besonders hervorgehoben wird, dass die *falsi* außer Stande ist, Fragen der Irrationalien, Binome und Residuen zu behandeln.

Eine ähnliche Integration von *regula falsi* und Algebra finden wir in der *abbaco*-Tradition nicht, anderseits doch etwas, welches wir als intellektuelle Parallele betrachten können. Schon Paolo Gherardi zeigt in seinem 1328 geschriebenen *Libro di ragioni* Interesse an der Lösung von irreduziblen Gleichungen. Bei Gherardi (der sie nicht selber erfunden hat) und bei vielen anderen sind die vorgeschlagenen Lösungsformeln einfach falsch; aber um 1400 – vielleicht früher – wird von besonderen Wurzeln gesprochen. So steht die *radice chubica con l'aguagliamento d'alchuno numero*, „Kubikwurzel mit Hinzufügung einer Zahls [α]" von N, modern ausgedrückt, für die Lösung der Gleichung $x^3 = \alpha x + N$. Das ist nicht beeindruckender als die Idee von Gemma; aber ein florentinischer *Tratato sopra l'arte della arismetricha* von etwa 1400[13] zeigt dann, wie damit auch Gleichungen $x^3+\alpha x^2 = N$ gelöst werden können. Diese Transformation setzt ein gutes Verständnis der Algebra von Polynomen voraus, und wurde für Cardano (der sie neu erfinden musste) wichtig; aber zu seiner Zeit erklärte der Autor des Manuskriptes genau wie Jacob, dass diese Wurzel nicht sehr nützlich sei.

Wenden wir uns nun zur Handhabung mehrerer Unbekannten. Hier macht Rudolff selber Interessantes. Unter den zahlreichen Illustrationen der Regel für den ersten Grad benutzen viele die *regel quantitatis*, „welche dann ist ein volkomenheit der Coss, Ja warlich ein solche volkomenheit, on welche sie nit vil mer gilt dann ein pfifferling" (Fol. I vi^v). Sie besteht in der Einführung einer zweiten Unbekannten, *eine quantitet* – oft gekürzt (nicht immer, auch nicht innerhalb der Gleichungen), als *quant*, *quanti*, *quantit* oder *q*. Das ist an sich vielleicht nicht sehr interessant, und jedenfalls nicht neu. Auffällig aber ist, dass es Rudolff gelingt, mit dieser Regel auch *drei* Unbekannte zu handhaben. Ein Beispiel (Fol. P viii^v) zeigt wie: Drei (sagen wir A, B und C) wollen ein Pferd kaufen, das 34 *f* kostet. Die Bedingungen können wir so schreiben:

$$A+{}^1/_2(B+C) = 34,\quad B+{}^1/_3(A+C) = 34\,,\quad C = {}^1/_4(A+B) = 34\,.$$

Für das Geld von A setzt Rudolff *r*, die *radix*. Dies gibt

$$B+C = 68–2r.$$

Dann wird für das Geld von B eine *quantitet* (im Weiteren *q*) gesetzt; in mehreren Schritten führt das zu

$$q = 17+{}^1/_5\, r.$$

Dann ist also diese erste *quantitet* bestimmt, und für das Geld von C kann Rudolff nochmals die *quantitet* setzen (im Weiteren *Q*). Unter stillschweigender Benutzung der ersten Bedingung, jetzt

$$2A+B+Q = 68,$$

ergibt sich

$$A+B = 68–r–Q.$$

Das wird in der dritten Bedingung eingeführt. Daraus ergibt sich

$$C = Q = {}^1/_3 r+22^2/_3,$$

wodurch alles auf eine Gleichung ersten Grades mit *einer* Unbekannten *r* reduziert worden ist.

Rhetorische Algebra mit den Unbekannten *cosa* und *quantità* gab es in Italien mindestens seit Antonio de' Mazzinghi vor 1400 (Antonio benutzt sie aber für schwierige Probleme zweiten Grades), und bei Fibonacci (in Problemen ersten

[13] Florenz, Biblioteca Nazionale Centrale, fondo princ. II.V.152, ed. [Franci & Pancanti 1988].

Grades) mit unbekannten *res–bursa*, *res–summa*, *res–pars* oder *res–causa*. Benedetto löst komplizierte Probleme ersten Grades mittels rudimentärer symbolischer Algebra mit bis fünf unbekannten, die durch Standardkürzungen repräsentiert werden.[14] Was Benedetto macht, scheint jedoch keinen Einfluss gehabt zu haben. Andererseits zeigt uns die *Summa* des Pacioli [1494], dass in Italien mehr als wir sonst wissen mit zwei Unbekannten gearbeitet wurde. Fol. 191^v bringt er eine „Geben-und-Nehmen" Aufgabe mit drei Teilnehmern, und sagt: „ich gebe dir dies nur um zu zeigen, wie man mit einer *quantita sorda* operiert, welche die Alten nennten 'zweiten Dinge' (*cose seconde*), um es von den ersten Setzungen zu unterscheiden". Diese *quantità sorda* wird dann $\tilde{\Phi}^{\bullet}$ (hier im Weiteren *q*) geschrieben. In der Rechnung wird das Geld des Ersten als 1 *co* (1 *cosa*) gesetzt, und das des Zweiten als 1 *q* zuerst gesetzt, dann eliminiert. Demnach wird *q* für das Geld des dritten benutzt.

Aufgrund der Formulierung Paciolis können wir vermuten, dass er diese Methode nicht selber erdacht hat. Das wird von dem 1484 geschriebenen *Triparty* des Nicolas Chuquet bestätigt: Er benutzt die Methode fünfmal in der angehängten Aufgabensammlung.[15]

Der Name *regula quantitatis* wird weder von Pacioli noch von Chuquet benutzt. Es steht aber im Margin als Kommentar bei Chuquet – Heeffer zufolge in der Hand des Etienne de la Roche. De la Roche benutzt es auch in seinem *Larismethique nouvellement composée* [1520: 42^r, 61^r], genauer als *regle de la quantite*, und genau wie Rudolff (und die Margin-Note) scheint er einen bereits zirkulierenden Terminus zu benutzen.

Schon Pacioli's *Summa* zeigt uns, dass die heute überlebenden Quellen nur sehr unvollständig über die algebraische Kultur informieren, auf die er baute (das wird auch anderswo im Buch deutlich). Als wir sehen, gilt genau dasselbe für Rudolffs *Coss:* Nach ihm war die Coß von seiner *Coss* bestimmt. Was Rudolff selber gelesen und wovon er gelernt hat, ist uns durch die Schriften von Alexander und Schreyber (und die erwähnten früheren Manuskripte) nur unvollständig bekannt. Vielleicht war es nicht alles auf deutschem Boden deutsch oder lateinisch gewachsen.

In der *Arithmetica integra* von [1544: 251^v und weiter] nimmt Stifel das Thema auf, und eliminiert durch eine Symbolik für vielen Unbekannten Rudolffs Bedürfnis an Fingerfertigkeit. Der erste Unbekannte bleibt 1 *r* (1 ꝶ), der zweite 1 *A*, „das selbe als 1*Ar*", der dritte „1 *C*, d.h. 1 *Cr*", der vierte 1 *D*, usw.

Bis hier unterscheidet sich das nicht sehr von dem, was Benedetto 1463 machte (Benedetto benutzte Standardkürzungen für Ordinalzahlen, *primo*, *secondo*, u.s.w., und dann vielleicht eine Kürzung anderer Art, z. B. für *cavallo* oder *borsa*). Es scheint jedoch ausgeschlossen, dass Stifel direkt oder indirekt von Benedetto gelernt hat – was wir finden, ist eine Parallelerfindung. Aber Stifel geht auch weiter. Benedetto hat seine Symbolik nur für Probleme ersten Grades benutzt, und stand deshalb nicht unter Zwang, eine Symbolik für die Potenzen der Unbekannten zu entwickeln – und da er seine Symbolik nur dort entwickelte, wo sie notwendig

[14] Siehe [Høyrup 2019] und [Høyrup 2020].

[15] Paris, BNF, fonds français 1346, siehe [Heeffer 2012: 134*f*].

war, hat er es auch nicht getan.[16] Stifel dagegen erweiterte seine Notation, obwohl (wie wir sehen werden) er das im Moment eigentlich nicht brauchte. Für die Potenzen der Unbekannten benutzt er die gewöhnlichen cossischen Symbole, aber durch die dazugehörenden Buchstaben modifiziert, „1 *Az* usw.". Für Produkte schreibt er die Faktoren neben einander: Das Produkt von $2r$ mit $2A$ (welch letzteres voll als $2Ar$ erscheinen würde, aber das ist glücklicherweise vergessen) wird $4rA$, gesprochen "4 *r* in 1 *A* multipliziert", während das Produkt von $3A$ und $9B$ als $27AB$ und $3z$ mal $4B$ als $12zB$ erscheint. Auch Divisionen werden diskutiert (jedoch nur solche, die nicht zu negativen Potenzen führen).

Das erste Beispiel (Fol. 252ᵛ–253ᵛ) verwendet nur r und A, und geht also kaum über Rudolff hinaus – es kommt auch von Rudolff, der jedoch in diesem Fall nur eine Unbekannte benutzt. Das zweite Beispiel (Fol. 253ᵛ–254ᵛ) dagegen verwendet sieben Unbekannte, aber in einem Zusammenhang, wo Algebra überhaupt nicht notwendig ist. Die Unbekannten sind Schulden (A, B, C, D, E, F, r), deren Summe minus jedes einzelnen bekannt ist – wir können den Aufgaben-Typ „Alle ohne Jeden" benennen. Schreiben wir für die Summe S, so ist

$$S-r = 142\ f$$
$$S-A = 126\ f$$
$$S-B = 136\ f$$
$$S-C = 128\ f$$
$$S-D = 130\ f$$
$$S-E = 120\ f$$
$$S-F = 148\ f$$

Fibonacci – und mit ihm viele Abbaco-Autoren – bemerken in ähnlichen Fällen, dass die Summe aller Zahlen die Totalsumme sieben Mal enthält, und das die Summe der Minuenden gleich die Totalsumme ist. Keine Algebra kommt in Spiel. Das kann auch nicht Stifel entgangen sein. Er will aber keine komplizierte Aufgabe lösen; seine Absicht ist, die neue Notation vorzuzeigen. Also findet er aus der ersten Gleichung, dass die Gesamtsumme $142+1r\ f$ ist. Die zweite Gleichung ergibt dann, dass $A = 16+1r$, usw. Stifel hätte also gleich so wie Rudolff den selben Namen für $A, B, \ldots F$ verwenden können, sie kommen nie in der selben Gleichung zusammen vor. Auch das weiß Stifel gewiss. Aber nochmals, er zeigt *eine Methode* vor – dass er ein Problem löst, ist Nebensache.

Die meisten der Beispiele Stifels sind ersten Grades, und seine Notation für höhere Potenzen und Produkte spielen dort keine Rolle. Nur drei scheinen nicht-linear zu sein, und nur zwei sind es wirklich.

Die nur scheinbar nicht-lineare Aufgabe findet sich auf Fol. 300ᵛ. Ein Rechteck mit Seiten 12 und 14 soll durch eine Paralleltransversale so geteilt werden, dass die Summe der entstehenden Diagonale 28 ist. Der Terminus *Az* (d.h., A^2) kommt

[16] Nur einmal habe ich eine Bezeichnung für die zweite Potenz der zweiten Unbekannten in einem italienischen Manuskript gesehen. In Vatikan, Ottobon. lat. 3307 (etwa 1458 geschrieben), wo ein Problem mittels *cosa* und *quantità* auf Fol. 173ᵛ gelöst wird, erscheint die zweite Potenz der *quantità* als *quantità di quantità* – scheinbar ganz improvisiert, aber möglicherweise ein Hinweis auf eine verbreitete Gewohnheit, jedenfalls eine Parallele zu *censo di censo*.

während der Formulierung der Gleichung vor, wird aber sofort eliminiert; sein Nutzen ist also dazu begrenzt, eine zu eliminierende Größe zu bezeichnen (was sicherlich nicht nutzlos ist – wie jeder Mathematiker weiß, wird dadurch Denken auf Wichtigeres konzentriert).

Auf Fol. 254ᵛ werden drei Unbekannte in einem (reduzierbaren) Problem vierten grades benutzt. Stifel fragt nach zwei Zahlen – sagen wir P und Q – wo

$$P^2+Q^2-(P+Q) = 78, \quad PQ+(P+Q) = 39.$$

Die erste Zahl (also unser P) wird mit r identifiziert, die zweite (also Q) mit A. Zur Bequemlichkeit wird ihre Summe mit B bezeichnet. Das Argument baut aber einem geometrischen Diagramm auf und ist nicht algebraisch. Die Einführung der überflüssigen "Variablen" B illustriert einfach, dass es in einem geometrischen Diagramm keine Notwendigkeit gibt, sich auf eine minimale Liste von "Unbekannten" zu begrenzen.

Das letzte Problem höheren Grades, wo die neue Symbolik benutzt wird, findet sich auf Fol. 292ʳ. Auch diesmal ist die Methode geometrisch, nicht algebraisch. Die beiden geometrisch gelösten Probleme bestätigen, dass Stifel Illustrationen sucht, nicht primär Probleme lösen will. Im erweiterten Sinn produziert er (auch hier) *Theorie* oder jedenfalls *Methode*, er antwortet nicht (wie Benedetto und die anderen Abbaco-Autoren) auf wirkliche oder mögliche *Herausforderungen*.

In seiner erweiterten Neuausgabe von Rudolffs *Coss* von [1553] benutzt Stifel dann die neu entwickelte Technik, und hier geht er weiter. Einerseits benutzt er jetzt die Technik in viele Aufgaben, die schon in Rudolffs Originalausgabe stehen – mehrmals auch, wo Rudolff nur *eine* Unbekannte benutzt. Die meisten sind ersten Grades; in den zwei, die es nicht sind (Fol. 362ʳ, 381ʳ), wird die zweite Unbekannte nur dazu benutzt, um eine Bedingung ersten Grades zu reduzieren.

Von weit größerem Interesse, andererseits, ist ein "Anhang", in welchem Stifel 24 neue Aufgaben vorlegt. 12 davon benutzen die neue Technik (Fol. 465ᵛ–474ᵛ), sämtlich höheren Grades. Neun fragen nach zwei Zahlen, die gewisse Bedingungen erfüllen – zuerst und am einfachsten $mn = 96$, $m^2+n^2 = 292$, wo Stifel den Ansatz $m{:=}r+A$, $n{:=}r-A$ macht. Dieselbe Struktur und derselbe Ansatz (obwohl mit anderen Zahlen) wird von Pacioli [1494: 148ᵛ] dort benutzt, wo er die gelegentliche Notwendigkeit einer zweiten Unbekannten erklärt.

Bei den übrigen Aufgaben erinnere ich mich nicht, sie anderswo bemerkt zu haben (was sicherlich nicht viel beweist!), und auch nicht bei den drei, die nach drei Zahlen in stetiger Proportion fragen.

Zwei der Aufgaben, die nach zwei Zahlen fragen, werden mit Hilfe eines geometrischen Diagramms gelöst, die zehn anderen algebraisch. Hier verwendet Stifel nicht länger das etwas zweideutige *Az* für die zweite Potenz von A.[17] Stattdessen schreibt er *AA* – und ähnliches für andere Potenzen und Produkte. Fol. 469ʳ geht er bis *k*, *zA*, *rAA* und *AAA*, Fol. 474ᵛ bis *rA*, *AA* und *BB*.

[17] Zweideutig freilich nur, wenn man vergisst, dass *z*, um Faktor zu sein, *links* vom *A* stehen muss.

In [1565: Piiir] gibt Mattheus Nefe in seinen *Zwey newe Rechenbuecher* ein einziges Beispiel von der *Regula quantitatis* (sonst wird *Coß* nicht behandelt). Die dazu gehörige Einleitung klingt nach Rudolff („ohne dieser Regel verstandt kan man gar wenig in der Coss nutz schaffen und geschweig in andern Regeln viel weniger"). Die Aufgabe ist vom Typ „Alle ohne Jeden" und hat vier Teilnehmer. Eine solche (obwohl mit anderen Zahlen) findet sich auch bei [Stifel 1553: 312^r], aber Nefe bringt eine Neuerung: Er sieht, dass es keinen Grund gibt, einer der Unbekannten eine Sonderstellung einzuräumen; seine Unbekannten sind deshalb A, B, C und D.
Man kann schon vermuten, dass Nefe nicht der einzige Rechenmeister sei, der von Stifel gelernt hat – wenn die Sache nicht schon Routine wäre, wäre es merkwürdig, dass Nefe nur ein einziges Beispiel anführt.

Das wird von zwei Werken aus 1556 bestätigt, die zwar nicht in Deutsch verfasst, aber von Stifel inspiriert sind.
Eines (mathematisch ziemlich banal) ist die *Logistice Regulae Arithmeticae, quam Cossam & Algebram quadratam vocant*, der zweite Teil von [Peucer 1556]. In Wittenberg geschrieben und gedruckt, ist es offenbar für das höhere lutherische Bildungssystem gedacht (hauptsächlich also für junge Leute, die das in ihrem künftigen Lebenslauf kaum brauchen würden[18]). Kommerziell scheint es kein großer Erfolg gewesen zu sein. Jedenfalls, gegen Ende (Fol. Tvi^r) kommt ein Abschnitt *De radicibus secundis*, wo Anfangs auf Rudolff, Cardanus und Stifel hingewiesen wird. Die Notation, die benutzt wird, ist diejenige der *Arithmetica integra* – d.h., "1 *A*, id est 1 *A z*", usw. Die Beispiele sind elementar: Zum Teil, in Übereinstemmung mit dem humanistischen Programm, gezogen von griechischen Epigrammen; eins ist vom Typ „Alle ohne Jeden".

Vielsagender und wichtiger ist die in Antwerpen gedruckte *Arithmétique seconde* des Valentin Mennher [1556].[19] Geboren in Kempten in Schwaben in 1520 und jung als Buchhalter im Hause Fugger tätig, kommt Mennher von deutscher Tradition (er erhält die Bürgerschaft in Antwerpen 1549). Diese „zweite Arithmetik", schon 1550 in einer grundlegenden Arithmetik versprochen (so sagt er es 1556 im Vorwort), umfasst drei Teilen. Der erste ist ein reguläres (und wohl geordnetes) *Rechenbuch*, der zweite eine Algebra, der dritte eine Geometrie. Letztere geht über das gewöhnlichen hinaus, und enthält z. B. einen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes im euklidischen Stil (Fol. Si^r), und weiter (Fol. Siii^r) eine archimedische Berechnung des Verhältnisses zwischen Kreis-Diameter und -Umfang.
Der zweite Teil, welcher seiner Überschrift nach ein *traicte de la Regle d'Algebra* ist (Fol. Fiiii^r), enthält im dazu gehörenden Vorwort (Fol. Fiiii^v) die Aussage, dass das Verstehen der hohen und freien Kunst der Arithmetik unendlich ist, und dass mehrere Fragen nur mit Hilfe der sehr sinnreichen *Regle d'Algebra, ou Cos* lösbar sind. Mennher erklärt weiter, dass der Stil und Weg (*Styl & maniere*) des sehr

[18] Shakespeares Hamlet, der ja aus Wittenberg nach dem morschen Dänemark zurückkehrt, mag es gelesen und nie verwendet haben.
[19] Siehe [Meskens 2013], wo Mennher sehr oft erwähnt wird, und als Supplement [Haller 2011].

berühmten Christoff Rudolff ihn in hohem Maße geholfen hat. Er weicht deshalb von Rudolff nicht viel ab, auch wenn er weiß, dass der hochberühmte Michael Stifel ihn erneut und viel erweitert hat, und zwar in der selben hochdeutschen Sprache. Er hat jedoch nur einen Großteil des besten davon übernommen, und anderes, für Kaufleute notwendigeres, hinzugefügt.
Zuerst finden wir dann eine sehr ordentliche Coß; am Ende aber (Fol. Oi^v) kommt *Regle de la quantité ou seconde radix*, während Rudolff sie viel früher behandelt. Mennher baut hier auf [Stifel 1553] und verwendet dieselbe Symbolik, kopiert aber nicht.
Am nächsten an Stifel kommt eine „Alle ohne Jeden" Aufgabe mit vier Teilnehmern (Fol. Oi^v), aber die Zahlen sind andere, und das gilt auch für die Setzungen der Unbekannten und damit für den Gang der Rechnungen.
Ganz am Ende des Abschnittes kommt noch eine Aufgabe ersten Grades, eine „geben und nehmen" Frage mit drei Teilnehmern; sie ist von Stifel unabhängig.
Zwei Probleme (Fol. Oii^r, Fol. Ov^v) fragen nach drei Zahlen in stetiger Proportion; auch sie sind nicht von Stifel entnommen.
Eine Aufgabe über zwei Zahlen mit der Struktur $p^2+q^2-p-q = 42$, $p+q+pq = 34$ konnte von der *Arithmetica integra* [Stifel 1544: 254^v] inspiriert sein – das geometrische Argument ist ähnlich, die Zahlen zwar verschieden. Sie kommt jedenfalls in [Stifel 1553] nicht vor.
Noch acht Aufgaben zweiten Grades fragen nach zwei Zahlen. Fünf werden geometrisch gelöst, von welchen zwei mit Stifel (mit veränderten Parametern) übereinstimmen und drei unabhängig sind.[20] Eine (Fol. Oiiii^v) wiederholt eine Frage von Stifel, wird aber von Stifel geometrisch, von Mennher algebraisch gelöst. Noch eine (Fol. Ov^r) wird von beiden algebraisch gelöst, aber Mennher setzt die Unbekannten in eleganterer Weise, und eine letzte Aufgabe (Fol. Ovi^v) mit algebraischer Lösung ist von Stifel unabhängig.
Alles in Allem sehen wir, dass Mennher die Technik (die algebraische sowohl als die geometrische Variante) gut beherrscht und selbständig handhaben kann.
Die *Regle de la quantité* wird in derselben Weise (doch leicht erweitert) in [Mennher 1565: Ffi^r–Ggii^v] vorgestellt. In einem Brief von etwa 1666 erwähnt John Collins [ed. Beeley & Scriba 2005] Mennher unter anderen guten Einführungen in die Algebra, zusammen mit Viète und Vaulezard (u.s.w.). Mennhers Arbeit war also noch ein Jahrhundert später wohl bekannt und geachtet.
Zusammen mit Jacques Peletier, der von Stifel gelernt hat, und mit Jean Borrel (der vermutlich auch stillschweigend das gemacht hat), ist Mennher damit ein Vermittler von Stifels Algebra zum französischen Sprachgebiet; ein Einfluss auf Viète ist kaum auszuschließen, aber da Viète nichts darüber sagt,[21] können wir genaueres nicht wissen.
Ein anderer Vermittler, nicht zum Sprachgebiet gehörend aber mit Einfluss auf vielen französisch-sprechenden jungen Leuten, war Christopher Clavius, dessen

[20] Fol. Oiii^r und Fol. Oiiii^r bzw. Fol. Oiii^v, Fol. Oiiii^r und Oiiii^v.
[21] Mit gutem Grund, können wir sagen. Der Sprung zur abstrakten Repräsentation von *Koeffizienten* ist was ganz anderes als die Symbolik für mehrere *Unbekannte*.

Algebra von [1608] Descartes' Schulbuch in La Flèche war. In einem Brief an Isaac Beeckman von 1619 [ed. Adam & Tannery 1908: 154–160] benutzt Descartes noch Clavius's (d.h., Rudolffs) Notation; in dem schon vor 1632 geschriebenen Manuskript zur *Géometrie* [van Randenborgh 2012] finden wir seine neue Symbolik, mit mehreren unbekannten und abstrakten Koeffizienten. Von wo oder wem er in der Zwischenzeit gelernt hat (wenn nicht von sich selbst[22]) wissen wir nicht (kaum aber von Viète).

Diese weiteren Geschichten sind aber – genau – *weitere* Geschichten, die hier nicht zu erzählen sind. Erstens der Kürze wegen, zweitens weil ich damit noch nicht fertig bin. Wenn ich trotzdem ohne langwierig zu werden verraten darf, hängt der Sprung in Abstraktion mit der neuen Art der Probleme zusammen, die jetzt in der Mathematik in das Zentrum rückte:[23] Nicht Pferdekauf und gefundene Börse sondern geometrische Probleme, die von Archimedes, Apollonios und Pappos inspiriert und schon *an sich* abstrakt waren. Die konnte man entweder durch entsprechende paradigmatische Beispiele ersetzen, oder abstrakt (und wenn algebraisch, also mit abstrakten Koeffizienten) repräsentieren.

Wer „kein Problem ungelöst lassen" wollte,[24] oder wer eine neue *scientia* versprach, „mit welcher im Allgemeinen alle Probleme gelöst werden können, die in irgendeiner Art von Quantitäten vorgeschlagen werden können, kontinuierlichen sowohl als diskreten"[25] – der hatte da kaum eine Wahl. Von (gemeinsamer) Not kommt (parallele) Erfindung.

Bibliographie

Adam, Charles, & Paul Tannery (eds), 1908. *Oeuvres* de Descartes. X: *Physico-mathematica. Compendium musicae. Regulae ad directionem ingenii. Recherche de la vérité. Supplément à la correspondance*. Paris: Léopold Cerf.

Beeckmann, Isaac, 1637x. *Catalogus Variorum & insignium Librorum Clarissimi Doctissimique viri D. Isaaci Catalogus ... Quorum Auctio habebitur in aedibus defuncti ad diem 14 Iulij M DC XXXVII.* Dordrecht: Isaac Andreae.

Beeley, Philip, & Christoph Scriba (eds), 2005. *The Correspondence of John Wallis*. Vol. 2. Oxford & New York: Oxford University Press.

Bos, Henk J. M., 2001. *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York etc.: Springer.

Clavius, Cristopher, 1608. *Algebra.* Roma: Bartolomeo Zanetti.

Curtze, Maximilian, 1895. „Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im 15. Jahrhundert". *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* **7** (=*Supplement zur Zeitschrift für Mathematik und Physik* **40**), 31–74.

[22] Zitate in [Gaukroger 1995: 173*f*] sprechen tatsächlich dafür – aber sie konnten sehr wohl Rationalisierungen sein. Jedenfalls besaß dieser Freund und Mentor von Descartes irgendeine *Arithmetique* von Mennher [Beeckmann 1637x: Biv^{v}].

[23] [Bos 1996: 186–188] und, im Allgemeinen, [Bos 2001]. Den Hintergrund zu dieser Verschiebung habe ich an anderer Stelle diskutiert.

[24] *nullum non problema solvere*, der berühmte Abschließende Satz von Viètes *In artem analyticem isagoge* [1591: 9^{r}].

[25] *quà generaliter solvi possint quæstiones omnes, quæ in quolibet genere quantitatis, tam continuæ quàm discretæ, possunt proponi* – Descartes im oben erwähnten Brief an Beeckman, 26. März 1619 [ed. Adam & Tannery 1908: 156*f*].

Curtze, Maximilian (ed.), 1902. *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance.* (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, vol. 12–13). Leipzig: Teubner.

de la Roche, Etienne, 1520. *Larismethique novellement composee*. Lyon: Constantin Fradin.

Folkerts, Menso, 1996. „Andreas Alexander – Leipziger Universitätslehrer und Cossist?" pp. 53–61 *in* Rainer Gebhardt, *Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit.* Beiträge zum wissenschaftlichen Kolloquium, 21. September 1996, Annaberg-Buchholz, Deutschland. Freiberg: Technische Universität Bergakademie Freiberg.

Franci, Raffaella, & Marisa Pancanti (eds), 1988. Anonimo (sec. XIV), *Il trattato d'algibra* dal manoscritto Fond. Prin. II. V. 152 della Biblioteca Nazionale di Firenze. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 18). Siena: Servizio Editoriale dell'Università di Siena.

Gaukroger, Stephen, 1995. *Descartes: An Intellectual Biography*. Oxford: Clarendon Press.

Gemma Frisius, Regnier, 1540. *Arithmeticae practicae methodus facilis*. Antwerpen: Gregorius Bontius.

Grammateus, Heinrich, 1518. *Ayn new kunstlich Buech, welches gar gewiß und behend lernet nach der gemainen regel Detre, welschen Practic, regel falsi unn etlichen regeln Cosse.* Wien: Lucas Alantsee.

Haller, Rudolf, 2011. "Valentin Mennher,sein Leben und seine Werke", pp. 87–110 *in* Rainer Gebhardt (ed.), *Kaufmanns-Rechenbücher und mathematische Schriften der frühen Neuzeit.* Annaberg-Buchholz: Adam-Ries-Bund.

Heeffer, Albrecht, 2012. "The Rule of Quantity by Chuquet and de la Roche and its Influence on German Cossic Algebra", pp. 127–147 *in* Sabine Rommevaux, Maryvonne Spiesser & Maria Rosa Massa Esteve (eds), 2012. *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*. Paris: Honoré Champion.

Høyrup, Jens, 2019. "Reinventing or Borrowing Hot Water? Early Latin and Tuscan Algebraic Operations with Two Unknowns". *Gaṇita Bhāratī* **41**, 115–159.

Høyrup, Jens, 2020. "Fifteenth- Century Italian Symbolic Algebraic Calculation with Four or Five Unknowns". *Gaṇita Bhāratī* **42**, 161–192.

Jacob, Simon, 1557. *Rechenbuch auff den Linien und mit Ziffern, sampt allerley forteyls Fragsweyse. Mit angehenckten Demonstrationen, die vormals im Teutschen nit getruckt.* Frankfurt a. M.: Christian Egenolff.

Jacob, Simon, 1565. *Ein neu und Wolgegründt Rechenbuch, auff den Linien und Ziffern, sampt der Welschen Practic und allerley Vortheilen, neben der Extraction Radicum, und von den Proportionen, mit vilen lustigen Fragen und Auffgaben, etc. Deßgleichen ein vollkommner Bericht der Regel Falsi* [...] *Und dann von der Geometria* [...]. Frankfurt am Main: Sigmund Fewyerabend & Simon Hüters.

Kaunzner, Wolfgang, 1972. "Über einige algebraische Abschnitte aus der Wiener Handschrift Nr. 5277". *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften*, 116. Band, 4. Abhandlung (Wien).

Kaunzner, Wolfgang, 1978. *Über die Handschrift Clm 26639 der Bayerischen Staatsbibliothek München: Eine mögliche Quelle zu Widmanns deutschem Rechenbuch von 1489. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematic im ausgehenden Mittelalter*. Hildesheim: Gerstenberg.

Mennher, Valentin, 1556. *Arithmetique seconde*. Antwerpen: Ian Loë.

Mennher, Valentin, 1565. *Praticque pour brievement apprendre à ciffrer, et tenir livre de compte, avec la regle de coss, et geometrie*. Antwerpen.

Meskens, Ad, 2013. *Practical Mathematics in a Commercial Metropolis: Mathematical Life in Late 16th Century Antwerp*. Dordrecht etc.: Springer.

Nefe, Mattheus, 1565. *Arithmetica: Zwey newe Rechenbuecher, das erste auff der Linien und Federn, darinn die gebreuchlichsten Regeln mit gruendlichem Unterricht erklert... das ander ist die kuenstliche Rechnung, wie man rechnet, wie weit von einer Stadt zur andern ist*. Breslau.

Pacioli, Luca, 1494. *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita.* Venezia: Paganino de Paganini.

Peletier, Jacques, 1554. *L'algebre*. Lyon: Ian de Tournes.

Peucer, Caspar. 1556. *Logistice Astronomica Hexacontadωn et Scrupulorum Sexagesimorum, quam Algorythmum minutiarum Physicalium vocant, Regulis explicata & demonstrationibus. Item: Logistice Regulae Arithmeticae, quam Cossam & Algebram quadratam vocant*. Wittenberg: Georg Rhau.

Rudolff, Christoff, 1525. *Behend unnd hübsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebra, so gemeincklich die Coss genennt werden*. Straßburg.

Scheubel, Johann, 1551. *Algebrae compendiosa facilisque descriptio, qua depromuntur magna Arithmetices miracula*. Parisiis: Apud Gulielmum Cavellat.

Schulz, Anthonius, 1600. *Arithmetica Oder Rechenbuch, Dorinn mit begründeter ausführung die Species, schöne nützliche Reguln [...] so wol die Kunst und sinnreiche Regul Coß, gelehret, mit außerlesenen Exempeln erkleret*. Liegnitz: Nikolaus Schneider.

Smeur, Alphons Johannes Emile Marie, 1978. "The *Rule of False* Applied to the Quadratic Equation, in Three Sixteenth Century Arithmetics". *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* **28**, 66–101.

Stevin, Simon, 1585. *L'aritmetique*. Leiden: Plantin.

Stifel, Michael, 1544. *Arithmetica integra*. Nürnberg: Johan Petreius.

Stifel, Michael, 1553. *Die Coss* Christoffs Rudolffs. Die schönen Exemplen der Coss gebessert und gemehrt. Königsberg in Preussen: Alexander Lutomyslensis.

Ulman, Oswald, & Caspar Thierfelder, 1564. *Ein New Künstlich Rechenbuch, auff den Linien und Ziffern, von mancherley schönen Regeln*. Leipzig: Jacob Berwaldt.

van Randenborgh, Christian, 2012. "Frans van Schootens Beitrag zu Descartes Discours de la méthode". *Mathematische Semesterberichte* **59**, 233–241.

Viète, François, 1591. *In artem analyticem isagoge*. Tours: Jamet Mettayer.

Vogel, Kurt, 1953a. "Alexander, Andreas". *Neue Deutsche Biographie* **1**, 195–196. https://www.deutsche-biographie.de/pnd120259869.html#ndbcontent. Besucht 31.1.2022.

Vogel, Kurt, 1953b. "Aquinas *(Aquinus) Suevus (Dacus)*". *Neue Deutsche Biographie* **1**, 333. https://www.deutsche-biographie.de/pnd104099283.html#ndbcontent. Besucht 31.1.2022.

Vogel, Kurt (ed.), 1981. *Die erste deutsche Algebra aus dem Jahre 1481*, nach einer Handschrift aus C 80 Dresdensis herausgegeben und erläutert. (Bayerische Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Abhandlungen. Neue Folge, Heft 160). München: Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Wappler, Hermann Emil, 1887. "Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert", pp. 1–32 *in Gymnasium zu Zwickau. Jahresbericht über das Schuljahr von Ostern 1886 bis Ostern 1887*. Zwickau: R. Zückler.

Weber, Johann, 1583. *Ein New Künstlich und Wolgegründt Rechenbuch, Auff den Linien und Ziffern, von vielen nützlichen Regeln zu allerley Handtierunge, Gewerben und Kaufmanschlag dientlichen*. Leipzig: Jacob Berwaldt.