Introduktion til prædikatlogik

Torben Braüner

Datalogisk Afdeling

Roskilde Universitetscenter

Plan

- Symbolisering af sætninger
- Syntaks
- Semantik

Udsagnslogik

Sætningen er den mindste syntaktiske enhed

Prædikatlogik

Sætninger brydes yderligere ned i

-- <u>konstanter</u>

-- <u>variable</u>

-- <u>prædikater</u>

-- <u>kvantorer</u>

Singulære sætninger

En <u>singulær</u> sætning er opbygget af en konstant og et prædikat

-- konstanten refererer til en ting

-- prædikatet angiver en egenskab

En sådan sætning siger at den ting hvortil der refereres han den angivne egenskab

Bemærk: En ting kan være hvad som helst!

Eksempel på en singulær sætning

Sætningen

”Mars er rund”

er opbygget af konstanten

”Mars”

samt prædikatet

”_ er rund”

Symbolisering af singulære sætninger

a, b, c, ... står for konstanter

P, Q, R, ... står for prædikater

Singulære sætninger symboliseres

P(a), Q(b), R(c), ...

som hhv. står for

”a har egenskaben P”,
”b har egenskaben Q”,
”c har egenskaben R”,

etc.

Eksempel på symbolisering

Hvis a er konstanten

”Mars”

og P er prædikatet

”_ er rund”

så symboliserer P(a) sætningen

”Mars er rund”

Generelle sætninger

En generel sætning er opbygget af en kvantor og et prædikat

En sådan sætning siger enten at

> alle ting har den angivne egenskab
>
> (alkvantorisering)

eller at

> der eksisterer ting der har den angivne egenskab
>
> (eksistenskvantorisering)

Eksempel på en generel sætning

Sætningen

”enhver ting er rund”

er opbygget af kvantoren

”enhver ting”

samt prædikatet

”_ er rund”

Symbolisering af generelle sætninger

$x, y, z, \ldots$ står for variable

$\forall x$ og $\exists y$ står for hhv.

”for alle x gælder at” og ”der eksisterer et y så”

Generelle sætninger symboliseres

$\forall x\, P(x), \exists y\, Q(y), \ldots$

som således hhv. står for

”for alle x gælder at x har egenskaben P”,
”der eksisterer et y så y har egenskaben Q”,

etc.

Eksempel på symbolisering

Hvis P er prædikatet

”_ er rund”

så symboliserer $\forall x\, P(x)$ sætningen

”for alle x gælder at x er rund”

dvs.

”enhver ting er rund”

Der findes mange flere slags sætninger end singulære og generelle!

Et prædikat kan have et vilkårligt antal pladser, dette antal kaldes prædikatets <u>aritet</u>

Eksempel

Sætningen ”Per er højere end Poul” er opbygget af konstanterne

”Per” og ”Poul”

samt prædikatet

”_ er højere end _”

der har aritet 2

Bemærk: Et prædikat med aritet 0 er en hel sætning

Prædikatlogikken tillader

-- prædikater af alle ariteter

-- vilkårlig sammensætning af formler vha.

   * udsagnslogikkens konnektiver

   * kvantorer

Prædikatlogikkens syntax

konstanter a, b, c, ...
variable x, y, z, ...
prædikater P, Q, R, ...

Hvis et prædikat P har aritet n, så er P efterfulgt af en n-tupel konstanter og variable en <u>atomar formel</u>

Eksempler på atomare formler

P(a), P(x), Q(b,z), Q(y,z)

hvor P har aritet 1 og Q har aritet 2

Sammensatte formler opbygges vha. konnektiverne

$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow$

og kvantorerne

$\forall x,\ \exists y$

samt paranteser

Eksempler på sammensatte formler

$P(x) \wedge Q(b,z),\ \forall x\, P(x),\ \exists z\, Q(b,z)$

Sætninger kan nu symboliseres (a la udsagnslogikken)

En <u>forekomst</u> af en variabel i en formel er enten <u>fri</u> eller <u>bundet</u>

-- alle variabelforekomster i atomare formler er frie

-- alle frie variabelforekomster i φ er frie i $\neg\varphi$

-- alle frie variabelforekomst i φ og ψ er frie i $\varphi\wedge\psi$
(tilsvarende for konnektiverne $\vee$ og $\Rightarrow$)

-- alle frie variabelforekomster i φ, pånær forekomster af x,
er frie i $\forall x\ \varphi$
(tilsvarende for kvantoren $\exists x$)

En formel hvori ingen variable forekommer frie er <u>lukket</u>

Eksempler

Forekomsten af x i formlen

$Q(b,x)$

er fri hvorimod forekomsten af x i

$\forall x\ Q(b,x)$

er bundet

Dvs. at $Q(b,x)$ er ikke lukket men $\forall x\ Q(b,x)$ er

$\varphi[a/x]$ er formlen φ hvor alle frie forekomster af variablen x er erstattet af konstanten a

Eksempler

$Q(b,x)[a/x]$ er formlen $Q(b,a)$

$Q(x,x)[a/x]$ er formlen $Q(a,a)$

$Q(b,x)[a/y]$ er formlen $Q(b,x)$

$(\forall x\ Q(b,x))[a/x]$ er formlen $\forall x\ Q(b,x)$

Prædikatlogikkens semantik

En model er en ikke-tom mængde *D* sammen med

-- ekstensioner |a|, |b|, |c|, ... for konstanterne a, b, c, ...
(ekstensionen |a| af en konstant a er et element i *D*)

-- ekstensioner |P|, |Q|, |R|, ... for prædikaterne P, Q, R, ...
(ekstensionen |P| af et prædikat P med aritet n
er en mængde af n-tupler af elementer i *D*)

Intuition:

Ekstensionen af en konstant er den ting der refereres til

Ekstensioner af et prædikat er mængden af de ting
der har den angivne egenskab

Givet en model

(D, |a|, |b|, |c|, ..., |P|, |Q|, |R|, ...)

kan en lukket formel tilordnes en sandhedsværdi

Atomare formler:

$P(a_1, \ldots, a_n)$ er sand netop hvis $(|a_1|, \ldots, |a_n|) \in |P|$

Sammensatte formler:

Sandhedsbetingelserne for $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ er som i udsagnslogikken

$\forall x\ \varphi$ er sand netop hvis $\varphi[a/x]$ er sand for enhver a
$\exists x\ \varphi$ er sand netop hvis der findes en a så $\varphi[a/x]$ er sand

(Antagelse: Ethvert element af *D* er refereret til af en konstant)

To vigtige definitioner

Lad φ og $\psi_1, \ldots, \psi_m$ være lukkede formler

φ er <u>gyldig</u> netop hvis φ er sand i enhver model

φ er en <u>logisk konsekvens</u> af $\psi_1, \ldots, \psi_m$ netop hvis
φ er sand i enhver model hvori $\psi_1, \ldots, \psi_m$ alle er sande

(Dvs. netop hvis formlen $(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m) \Rightarrow \varphi$ er gyldig)