Introduktion til udsagnslogik

Torben Braüner
Datalogisk Afdeling
Roskilde Universitetscenter

Plan

- Symbolisering af sætninger
- Syntaks
- Semantik

Vi betragter i udsagnslogikken

deklarative

sætninger

Dette i modsætning til

interrogative (spørgende),
imperative (befalende), og
optative (i ønskemåde)

sætninger

Eksempler på deklarative sætninger

”Solen er rød”

”Alle spurve er fugle”

”Jeg hedder Torben”

”Det regner nu”

Udsagnslogikkens syntaks

<u>Udsagnsbogstaverne</u> p, q, r, ... står for udsagn

Udsagnsbogstaverne er <u>atomare formler</u> med hvilke <u>sammensatte formler</u> opbygges vha. <u>konnektiverne</u>

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$

samt paranteser

Konnektiverne står for respektivt

”ikke”, ”og”, ”eller”, ”medfører”

Eksempler på formler

$$\neg p, \ (\neg p \vee q), \ (p \Rightarrow q), \ (((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q)$$

Formlen $\neg p$ er opbygget vha. konnektivet $\neg$ og den atomare formel p,

Formlen $(\neg p \vee q)$ er opbygget vha. konnektivet $\vee$ og formlerne $\neg p$ og q, etc.

Paranteser udelades ofte, som for eksempel i formlen $\neg p \vee q$

Deklarative sætninger <u>symboliseres</u> vha. formler

Eksempler på symboliseringer

Hvis p og q henholdsvis symboliserer sætningerne

> ”Solen er rød” og ”Jeg hedder Torben”

Så symboliserer formlen $\neg p$ sætningen

> ”Solen er ikke rød”

og $\neg p \vee q$ symboliserer

> ”Solen er ikke rød eller jeg hedder Torben”

Udsagnslogikkens semantik

I det følgende kaldes S og F <u>sandhedsværdier</u>

At <u>tilordne</u> et udsagnsbogstav sandhedsværdien S er at antage at det står for et sandt udsagn

Tilsvarende, at tilordne et udsagnsbogstav sandhedsværdien F er at antage at det står for et falskt udsagn

Et udsagnsbogstav tilordnes enten S eller F

Sandhedstabeller

Til hvert konnektiv er der givet en sandhedstabel

φ	$\neg\varphi$
S	F
F	S

φ	ψ	$\varphi\wedge\psi$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

φ	ψ	$\varphi\vee\psi$
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

φ	ψ	$\varphi\Rightarrow\psi$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Derved kan enhver sammensat formel gives en sandhedstabel

(Græske bogstaver φ, ψ, θ, … står for vilkårlige formler)

Eksempler på sandhedstabeller

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
S	F	S
F	S	F

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
S	F	S
F	S	S

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
S	S	F	S
S	F	F	F
F	S	S	S
F	F	S	S

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
S	S	F	F	S
S	F	S	S	F
F	S	F	F	S
F	F	S	F	S

Alternativ til sandhedstabeller

$\neg\varphi$ er sand netop hvis φ ikke er sand

$\varphi\wedge\psi$ er sand netop hvis φ er sand og ψ er sand

$\varphi\vee\psi$ er sand netop hvis φ er sand eller ψ er sand

$\varphi\Rightarrow\psi$ er sand netop hvis φ er sand medfører at ψ er sand

Sådanne <u>sandhedsbetingelser</u> rummer samme information som sandhedstabellerne

Et par definitioner

En formel er en <u>tautologi</u> netop hvis den er sand uanset hvilke sandhedsværdier de involverede udsagnsbogstaver tilordnes

To formler er <u>logisk ækvivalente</u> netop hvis de har samme sandhedstabel

(Dvs. at formlerne φ og ψ er logisk ækvivalente netop hvis formlen $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$ er en tautologi)

Eksempler

p er ækvivalent med $\neg\neg p$

$p \vee \neg p$ er en tautologi

$\neg p \vee q$ ækvivalent med $\neg(p \wedge \neg q)$
(og iøvrigt også med $p \Rightarrow q$)

(Se tidligere overheads)

En tautologi er sand udelukkende i kraft af dens form

Sprogligt svarer en tautologi til en sætning der er sand udelukkende i kraft af dens grammatiske form

Eksempel

Hvis r symboliserer sætningen

”Solen skinner”

så symboliserer $r \vee \neg r$

”Solen skinner eller solen skinner ikke”

En sådan sætning giver ingen information i sig selv

En anden definition

Formlen φ er en <u>logisk konsekvens</u> af formlerne $\psi_1, ..., \psi_m$ netop hvis φ er sand ved alle tilordninger af sandhedsværdier ved hvilke $\psi_1, ..., \psi_m$ alle er sande

(Dvs. netop hvis formlen $(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_m) \Rightarrow \varphi$ er en tautologi)